Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Mara Ungureanu
Mathematisches Institut
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Differentialgeometrie I
WS 2020/21
13. Januar, 2021

Übungsblatt 9

Abgabe: 20. Januar, 2021, 12:00 Uhr

Aufgabe 33. (4 Punkte) Seien M eine glatte Mannigfaltigkeit und D ein Zusammenhang auf M. Betrachten Sie die Abbildung $R : \mathscr{X}(M)^3 \to \mathscr{X}(M)$, die durch

$$(R_{X,Y}Z =)\ R(X,Y,Z) := D_{[X,Y]}Z - D_X D_Y Z + D_Y D_X Z$$

definiert ist. Zeigen Sie: Unter dem Isomorphismus von Aufgabe 23 b) entspricht R einem Tensorfeld vom Typ $(1,3)$.

Aufgabe 34. a) (2 Punkte) Sei $\mathbb{R}^2$ versehen mit der Standard-Struktur einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie: Die Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, die durch $\gamma(t) = (t^3, t^3)^T$ gegeben ist, ist keine Geodätische.

Hinweis: Nutzen Sie Bemerkung 4.3.2 b).

b) (2 Punkte) Sei $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ mit der von den Standard-Strukturen von $\mathbb{R}^3$ induzierten Struktur einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Betrachten Sie einen Punkt $p \in \mathbb{S}^2$ und einen Tangentialvektor $v \in T_p\mathbb{S}^2$, $v \neq 0$. Dann nennt man der *Großkreis mit konstanter Geschwindigkeit v durch p* den Durchschnitt von $\mathbb{S}^2$ mit der Ebene in $\mathbb{R}^3$, die 0, p und v enthält, und seine Parametrisierung ist durch

$$\forall t \in \mathbb{R}\colon \gamma(t) = \cos(\|v\|t) \cdot p + \sin(\|v\|t) \cdot \frac{v}{\|v\|},\ \gamma(0) = p,\ \dot\gamma(0) = v$$

gegeben. Zeigen Sie: Auf $\mathbb{S}^2$ sind die nicht konstanten Geodätischen mit maximalem Definitionsbereich genau die oben definierten Großkreise.

Hinweis: Nutzen Sie Korollar 4.3.5 aus der Vorlesung.

Aufgabe 35. a) (1 Punkt) Sei $\mathbb{R}^n$ versehen mit der Standard-Struktur einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Berechnen Sie die Exponentialabbildung auf $\mathbb{R}^n$.

b) (3 Punkte) Sei $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ mit der von den Standard-Strukturen von $\mathbb{R}^2$ induzierten Struktur einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass für alle $\theta, v \in \mathbb{R}$ die Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, $\gamma(t) = (\cos(\theta + tv), \sin(\theta + tv))^T$ eine Geodätische auf $\mathbb{S}^1$ ist. Darüber hinaus berechnen Sie die Exponentialabbildung auf $\mathbb{S}^1$.

Aufgabe 36. Seien $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ mit der von den Standard-Strukturen von $\mathbb{R}^3$ induzierten Struktur einer Riemannschen Mannigfaltigkeit und $\xi = (\theta, \varphi)^T$ Kugelkoordinaten auf $\mathbb{S}^2$. Sie dürfen ohne Beweis nutzen, dass alle Christoffelsymbole des Levi-Civita-Zusammenhangs auf $\mathbb{S}^2$ bzgl. der Kugelkoordinaten $(\theta, \varphi)^T$ verschwinden, außer

$$\Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta,\ \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

(vgl. Aufgabe 32). Betrachten Sie für ein fixiertes $\theta_0 \in (0,\pi)$ die Kurve $\gamma(t) : (-\pi,\pi) \to \mathbb{S}^2$, $\gamma(t) := \xi^{-1}\big((\theta_0, t)^T\big)$ und einen fixierten Tangentialvektor $v_0 := v_0^\theta \partial_\theta|_{\gamma(0)} + v_0^\varphi \partial_\varphi|_{\gamma(0)} \in T_{\gamma(0)}\mathbb{S}^2$. Berechnen Sie die Parallelverschiebung $P^{\gamma(\tau)}_{\gamma(0)}(v_0)$, wobei $\tau \in (-\pi,\pi)$, $\tau \neq 0$. Dafür

a) (1 Punkt) Zeigen Sie: Für jedes parallele $Z \in \mathscr{X}(\gamma)$ entlang γ mit

$$Z(t) = Z^{\theta}(t)\partial_{\theta}|_{\gamma(t)} + Z^{\varphi}(t)\partial_{\varphi}|_{\gamma(t)}$$

gilt:

$$\frac{\partial Z^{\theta}}{\partial t}(t) - Z^{\varphi}(t)\sin\theta_0\cos\theta_0 = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial Z^{\varphi}}{\partial t}(t) + Z^{\theta}(t)\frac{\cos\theta_0}{\sin\theta_0} = 0. \tag{2}$$

b) (2 Punkte) Lösen Sie das Gleichungssystem in Teil a).

Hinweis: Leiten Sie (1) ab und setzen Sie in (2) ein; dann leiten Sie erst (2) ab und setzen Sie in (1) ein. Das ergibt zwei abgekoppelte Differentialgleichungen. Die Lösung ist dann:

$$Z^{\theta}(t) = A\cos(t\cos\theta_0) + B\sin(t\cos\theta_0)$$
$$Z^{\varphi}(t) = C\cos(t\cos\theta_0) + D\sin(t\cos\theta_0),$$

wobei A, B, C, D Konstanten sind.

c) (1 Punkt) Zeigen Sie:

$$P_{\gamma(0)}^{\gamma(\tau)}(v_0)^{\theta} = v_0^{\theta}\cos(\tau\cos\theta_0) + v_0^{\varphi}\sin\theta_0\sin(\tau\cos\theta_0)$$
$$P_{\gamma(0)}^{\gamma(\tau)}(v_0)^{\varphi} = v_0^{\varphi}\cos(\tau\cos\theta_0) - \frac{v_0^{\theta}}{\sin\theta_0}\sin(\tau\cos\theta_0).$$

Hinweis: Bestimmen Sie die Konstanten A, B, C, D mithilfe des Anfangswertes $Z(0) = v_0$ und der Gleichungen (1) und (2).

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.