Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Mara Ungureanu
Mathematisches Institut
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Differentialgeometrie I
WS 2020/21
22. Dezember, 2020

Übungsblatt 8

Abgabe: 13. Januar, 2021, 12:00 Uhr
Dieses ist ein Bonusblatt. Sie können extra Punkte sammeln.

Aufgabe 29. a) (2 Bonuspunkte) Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $F : M \to N$ eine glatte Abbildung. Sei $q \in N$ ein regulärer Wert von F, $P := F^{-1}(q)$ die entsprechende Untermannigfaltigkeit von M und $j : P \hookrightarrow M$ die Inklusionsabbildung. Zeigen Sie: Für jedes $p \in P$ liefert das Differential Dj_p einen Isomorphismus

$$T_pP \simeq \ker\big(DF_p \colon T_pM \to T_{F(p)}N\big).$$

Hinweis: Zeigen Sie erst, dass $Dj_p(v) \in \ker\big(DF_p \colon T_pM \to T_{F(p)}N\big)$ für alle $v \in T_pM$. Dann zeigen Sie, dass $\dim T_pP = \dim\ker\big(DF_p \colon T_pM \to T_{F(p)}N\big)$.

b) (2 Bonuspunkte) Sei $\mathbb{R}^2$ versehen mit der Standard-Struktur einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Betrachten Sie einen Zusammenhang D auf $\mathbb{R}^2$, so dass für die entsprechenden Christoffelsymbole gilt: $\Gamma^1_{12} = 1$ und alle anderen $\Gamma^k_{ij} = 0$. Betrachten Sie die Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, die durch $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \gamma^2(t))^T := (-e^{-t} + 3, t + 1)^T$ gegeben ist. Finden Sie das eindeutige $Z \in \mathscr{X}(\gamma)$ mit $Z(0) = \dot\gamma(0)$ und $Z'(t) \equiv 0$.

Hinweis: Wenn man in Proposition 4.2.3 nur die Bedingungen (KA1)-(KA3) fordert, dann gilt die Proposition für alle Zusammenhänge D. Also dürfen Sie den Ausdruck $(*)$ für $Z'(t)$ auch hier nutzen.

Aufgabe 30. Betrachten Sie in der Notation von Aufgabe 27 $V = \mathbb{R}^{n+1}$ mit den Standardkoordinaten $(x^0, x^1, \ldots, x^n)^T$,

$$\langle x, y\rangle = -x^0y^0 + \sum_{i=1}^n x^iy^i \text{ und } g = -dx^0 \otimes dx^0 + \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i.$$

Für jedes $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sei $\mathcal{P}_a := \{p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle p, p\rangle = a\}$.

a) (1 Bonuspunkt) Zeigen Sie mithilfe des Satzes vom regulären Wert, dass $\mathcal{P}_a$ eine glatte n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$ ist.

b) (1 Bonuspunkt) Seien $j_a : \mathcal{P}_a \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ die Inklusion und $g_a := j_a^*g$ wie in Definition 3.2.7. Nutzen Sie Aufgabe 29 a), um für $p \in \mathcal{P}_a$ zu zeigen, dass $(Dj_a)_p$ einen Isomorphismus

$$T_p\mathcal{P}_a \simeq \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle p, v\rangle = 0\}$$

liefert.

c) (2 Bonuspunkte) Folgern Sie aus Teil b), dass g_a eine semi-Riemannsche Metrik auf $\mathcal{P}_a$ vom Index n ist, falls $a < 0$, oder vom Index $n - 1$, falls $a > 0$.

Hinweis: Nutzen Sie, dass $\mathbb{R}^{n+1} \simeq T_p\mathcal{P}_a \oplus \langle p\rangle$ für alle $p \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Aufgabe 31. (4 Bonuspunkte) Für $m > 0$ seien $S_m \subset \mathbb{R}^4$ und $\xi : S_m \to \mathbb{R} \times (0, 2m) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ definiert wie in Beispiel 3.2.2 aus der Vorlesung. Für alle $p \in S_m$ seien $(e_1, \ldots, e_4)$ die Koordinatentangentialvektoren zu ξ von T_pS_m, also insbesondere $e_3 = \partial_\theta$, $e_4 = \partial_\varphi$. Betrachten Sie die Funktion $h : (0, 2m) \to \mathbb{R}$, die durch $h(r) := 1 - \frac{2m}{r}$ definiert ist, und die Schwarzschildmetrik g auf S_m, die für $p \in S_m$ mit $\xi(p) = (t, r, \theta, \varphi)$ durch

$$\Big(g_p(e_j, e_k)\Big)_{j,k\in\{1,\ldots,4\}} = \operatorname{diag}(-h(r), (h(r))^{-1}, r^2, r^2 \sin^2\theta)$$

gegeben ist. Berechnen Sie die Christoffelsymbole Γ^3_{ij} und Γ^4_{ij} dieser Metrik, wobei $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Aufgabe 32. Sei $\mathbb{R}^3$ versehen mit der Standard-Struktur einer Riemannscher Mannigfaltigkeit, $(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)^T$ Kugelkoordinaten auf $\mathbb{R}^3$, und deren entsprechende Tangetialvektorfelder

$$\begin{aligned}
\partial_r &= (\cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\theta)^T\\
\partial_\theta &= (r\cos\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\cos\theta, -r\sin\theta)^T\\
\partial_\varphi &= (-r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi\sin\theta, 0)^T.
\end{aligned}$$

a) (1 Bonuspunkt) Zeigen Sie: Für $g = \sum_{i=1}^3 dx^i \otimes dx^i$ die Standardmetrik auf $\mathbb{R}^3$ gilt: bzgl. der Kugelkoordinaten ist

$$g = dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta + r^2(\sin\theta)^2 d\varphi \otimes d\varphi.$$

b) (2 Bonuspunkte) Sei ∇ der Levi-Civita Zusammenhang der Metrik g. Berechnen Sie: $\nabla_{\partial_\theta}\partial_\theta$, $\nabla_{\partial_\theta}\partial_\varphi$, $\nabla_{\partial_\varphi}\partial_\theta$, und $\nabla_{\partial_\varphi}\partial_\varphi$.

Hinweis: Nutzen Sie die Koszul-Formel und, dass $[W, X] = [V, X] = [V, W] = 0$ falls $X, V, W \in \{\partial_r, \partial_\theta, \partial_\varphi\}$.

c) (1 Bonuspunkt) Seien $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ mit der von den Standard-Strukturen von $\mathbb{R}^3$ induzierten Struktur einer Riemannschen Mannigfaltigkeit und $\overline{\nabla}$ der aus ∇ induzierte Zusammenhang auf $\mathbb{S}^2$ wie in Proposition 4.1.11 in der Vorlesung. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{\partial_\theta}\partial_\theta &= 0\\
\overline{\nabla}_{\partial_\theta}\partial_\varphi = \overline{\nabla}_{\partial_\varphi}\partial_\theta &= \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\partial_\varphi\\
\overline{\nabla}_{\partial_\varphi}\partial_\varphi &= -\sin\theta\cos\theta\partial_\theta.
\end{aligned}$$

Frohe Weihnachten und alles Gute fürs Neue Jahr 2021!