Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Mara Ungureanu
Mathematisches Institut
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Differentialgeometrie I
WS 2020/21
16. Dezember, 2020

Übungsblatt 7

Abgabe: 22. Dezember, 2020, 18:00 Uhr

Aufgabe 25. Sei $\mathbb{R}^n$ versehen mit der Standard-Struktur einer Riemannschen Mannigfaltigkeit.

a) (2 Punkte) Betrachten Sie einen Zusammenhang $\widetilde{D}$ auf $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, so dass für die entsprechenden Christoffelsymbole gilt: $\Gamma^1_{23} = 1$, $\Gamma^3_{21} = 0$. Finden Sie $X, V, W \in \mathscr{X}(\mathbb{R}^n)$, so dass

$$X\langle V, W\rangle \neq \langle \widetilde{D}_X V, W\rangle + \langle V, \widetilde{D}_X W\rangle$$

gilt.

Hinweis: Betrachten Sie z.B. die Vektorfelder $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ (in der richtigen Reihenfolge!)

b) (2 Punkte) Betrachten Sie den natürlichen Zusammenhang D auf $\mathbb{R}^n$, der wie in Beispiel 4.1.2 aus der Vorlesung definiert ist. Zeigen Sie, dass D der Levi-Civita-Zusammenhang ist.

Aufgabe 26. Seien $\mathbb{R}^2$ versehen mit der Standard-Struktur einer Riemannschen Mannigfaltigkeit und $(r\cos\theta, r\sin\theta)^T$ Polarkoordinaten auf $\mathbb{R}^2$.

a) (1 Punkt) Berechnen Sie die Christoffel-Symbole des Levi-Civita-Zusammenhangs auf $\mathbb{R}^2$ bezüglich Standardkoordinaten.

b) (1 Punkt) Berechnen Sie die Koeffizienten der Standard-Metrik $g = dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2$ bezüglich der Polarkoordinaten.

c) (2 Punkte) Berechnen Sie die Christoffel-Symbole des Levi-Civita-Zusammenhangs auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ bezüglich Polarkoordinaten.

Aufgabe 27. Sei V ein reeller n-dimensionaler Vektorraum und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine nicht-degenerierte symmetrische Bilinearform vom Index r auf V. Betrachten Sie die Abbildung $\alpha : V \to V^*$, die durch $\alpha(X)(Y) = \langle X, Y\rangle$ für alle $X, Y \in V$ gegeben ist.

a) (1 Punkt) Zeigen Sie: α ist ein Isomorphismus von Vektorräumen.

b) (2 Punkte) Zeigen Sie: Die Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ liefert einen metrischen Tensor g auf V, und es existiert eine globale Karte $\xi = (x^1, \ldots, x^n)^T : V \to \mathbb{R}^n$, so dass $g = \sum_{i=1}^n \epsilon_i dx^i \otimes dx^i$, wobei

$$\epsilon_i = \begin{cases} -1 & \text{falls } 1 \leq i \leq r \\ 1 & \text{falls } r+1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Hinweis: Nutzen Sie die Identifikation $V \simeq T_pV$ aus Aufgabe 13.

c) (1 Punkt) Zeigen Sie: Die Abbildung $\nabla : \mathscr{X}(V) \to \mathscr{X}(V)$, die durch

$$(\nabla_X Y)(p) := DY_p(X_p) \text{ für alle } p \in V$$

definiert ist, liefert einen Zusammenhang auf V.

Hinweis: Mithilfe der Identifikation $T_pV \simeq V$ können Sie $X, Y \in \mathscr{X}(V)$ als glatte Abbildungen $X, Y : V \to V$ auffassen.

Aufgabe 28. Seien $\mathbb{R}^2$ versehen mit den Standardkoordinaten $(x^1, x^2)^T$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Euklidische Skalarprodukt, und $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ mit der induzierten Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit. Betrachten Sie das Normalenbündel $\nu : N_{\mathbb{S}^1/\mathbb{R}^2} \to \mathbb{S}^1$, das durch

$$N_{\mathbb{S}^1/\mathbb{R}^2} := \bigsqcup_{p\in\mathbb{S}^1} T_p\mathbb{R}^2/T_p\mathbb{S}^1$$

definiert ist. Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass $N_{\mathbb{S}^1/\mathbb{R}^2}$ eine natürliche Struktur eines glatten Vektorbündels auf $\mathbb{S}^1$ trägt.

a) (1 Punkt) Zeigen Sie: Für $p \in \mathbb{S}^1$ gilt $v \in T_p\mathbb{S}^1$ genau dann, wenn $\langle v, p\rangle = 0$.

   Hinweis: Nutzen Sie Aufgabe 12 b) und die Identifikation $T_pV \simeq V$, falls V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

b) (2 Punkte) Betrachten Sie für jedes $p \in \mathbb{S}^1$ die Abbildungen

$$\begin{aligned}
&\phi : N_{\mathbb{S}^1/\mathbb{R}^2} \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, \quad \phi([v]) := (p, \langle v, p\rangle) \text{ für } [v] \in \nu^{-1}(p),\\
&\psi : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \to N_{\mathbb{S}^1/\mathbb{R}^2}, \quad \psi(p,\lambda) := [\lambda(x^1(p), x^2(p))] \in \nu^{-1}(p), \text{ wobei } (x^1(p), x^2(p)) \in T_p\mathbb{R}^2\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{bzgl. der Basis aus Standardkoordinatenvektoren gegeben ist.}
\end{aligned}$$

   Zeigen Sie: ϕ ist wohldefiniert, $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}}$, und $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_{N_{\mathbb{S}^1/\mathbb{R}^2}}$.

   Hinweis: Für $[v] \in \nu^{-1}(p)$ gilt: falls $u \in [v]$, dann $u - v \in T_p\mathbb{S}^1$, und daraus folgt, dass $\langle u - v, p\rangle = 0$.

c) (1 Punkt) Seien g die Standardmetrik auf $\mathbb{R}^2$ und $Y = \left(-x^2\frac{\partial}{\partial x^1} + x^1\frac{\partial}{\partial x^2}\right)\Big|_{\mathbb{S}^1}$ ein Tangentialvektorfeld auf $\mathbb{S}^1$. Betrachten Sie den Schnitt X von $N_{\mathbb{S}^1/\mathbb{R}^2}$, der durch $p \mapsto [\widetilde{X}_p]$ mit $\widetilde{X}_p = x^1(p)\partial_1|_p + x^2(p)\partial_2|_p$ gegeben ist. Zeigen Sie: Für alle Schnitte $\widetilde{Y}$ von $T\mathbb{R}^2$ mit $\widetilde{Y}_p = Y_p\ \forall p \in \mathbb{S}^1$ gilt $\forall p \in \mathbb{S}^1 \colon g(\widetilde{X}, \widetilde{Y})(p) = 0$.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.