Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Mara Ungureanu
Mathematisches Institut
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Differentialgeometrie I
WS 2020/21
2. Dezember, 2020

Übungsblatt 5

Abgabe: 9. Dezember, 2020, 12:00 Uhr

Aufgabe 17. Betrachten Sie $\mathbb{R}^2$ und den Einheitskreis $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ mit den Standardstrukturen glatter Mannigfaltigkeiten, und die Äquivalenzrelation

$$(x, y) \sim (x + n, (-1)^n y) \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}.$$

Sei $\mathcal{M} = \mathbb{R}^2/\sim$ die Menge aller Äquivalenzklassen, versehen mit der Quotiententopologie.

a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^2$ auf $\mathcal{M}$ die Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit induziert.

Hinweis: Betrachten Sie eine offene Überdeckung $\mathcal{M} = U \cup V$ wobei z.B. $U = \{[(x, y)] \in \mathcal{M} \mid 0 < x < 1, y \in \mathbb{R}\}$ und $V = \{[(x, y)] \in \mathcal{M} \mid -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}, y \in \mathbb{R}\}$.

b) (2 Punkte) Betrachten Sie die Abbildung $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{S}^1$, die durch

$$\mu([(x, y)]) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))^T$$

definiert ist. Zeigen Sie, dass $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{S}^1$ ein glattes Vektorbündel vom Rang 1 ist. Man nennt dieses Vektorbündel das *Möbiusbündel.*

Hinweis: Nutzen Sie, dass für jedes $p \in \mathbb{S}^1$ ein eindeutiges $x_0 \in [0, 1)$ existiert, so dass $p = (\cos(2\pi x_0), \sin(2\pi x_0))^T$.

Aufgabe 18. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Ein Vektorbündel $\pi : E \to M$ vom Rang n heißt *trivial*, wenn eine Trivialisierung $h : M \times \mathbb{R}^n \to E$ über der ganzen Mannigfaltigkeit M existiert.

a) (2 Punkte) Zeigen Sie: Ein Vektorbündel $\pi : E \to M$ vom Rang n ist trivial genau dann, wenn es n Schnitte $s_1, \ldots, s_n$ hat, so dass die Vektoren $s_1(p), \ldots, s_n(p) \in \pi^{-1}(p)$ für jedes $p \in M$ linear unabhängig sind.

Hinweis: Falls E trivial ist, betrachten Sie $s_j(p) := h(p, e_j)$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$, wobei $(e_1, \ldots, e_n)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ ist. Umgekehrt betrachten Sie die Abbildung $h(p, (x^1, \ldots, x^n)^T) := x^1 s_1(p) + \cdots + x^n s_n(p) \in \pi^{-1}(p)$.

b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass das Möbiusbündel aus Aufgabe 17 kein triviales Vektorbündel auf $\mathbb{S}^1$ ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass jeder Schnitt $s : \mathbb{S}^1 \to \mathcal{M}$ mindestens eine Nullstelle hat.

Aufgabe 19. Seien M eine glatte Mannigfaltigkeit, $\xi = (x^1, \ldots, x^n)^T : U \to \xi(U)$ eine Karte von M, und $d : \mathscr{F}(M) \to \mathscr{X}^*(M)$ das äußere Differential. Zeigen Sie:

a) (1 Punkt) Für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt: $d(x^j) = dx^j \in \mathscr{X}^*(U)$.

b) (1 Punkt) Für alle $f, g \in \mathscr{F}(M)$ gilt: $d(f \cdot g) = f \cdot dg + df \cdot g$.

c) (1 Punkt) Für alle $f \in \mathscr{F}(M)$ und $h \in \mathscr{F}(\mathbb{R})$ gilt: $d(h \circ f) = (h' \circ f) \cdot df$.

d) (1 Punkt) Für alle $f \in \mathscr{F}(U)$ gilt:

$$\forall p \in U\colon df_p = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) dx^j|_p.$$

Hinweis: Nutzen Sie Lemma 2.2.3 aus der Vorlesung.

Aufgabe 20. Seien $(x^1, x^2)^T$ die Standardkoordinaten auf $\mathbb{R}^2$. Betrachten Sie für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Abbildung $\psi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die durch $\psi_t(x^1, x^2) := (e^t x^1, e^t x^2)$ definiert ist.

a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass gilt:

   i) ψ_0 ist die Identitätsabbildung auf $\mathbb{R}^2$.
   ii) $\forall s, t \in \mathbb{R}\colon \psi_s \circ \psi_t = \psi_{s+t} = \psi_t \circ \psi_s$.
   iii) $\forall t \in \mathbb{R}\colon \psi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist ein Diffeomorphismus mit $(\psi_t)^{-1} = \psi_{-t}$.

b) (2 Punkte) Finden Sie das Vektorfeld $X \in \mathscr{X}(\mathbb{R}^2)$ mit Fluss ψ, wobei $\psi(p, t) = \psi_t(p)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $p \in \mathbb{R}^2$.

c) (1 Punkt) Sind alle Vektorfelder auf $\mathbb{R}^2$ vollständig?
   Hinweis: Betrachten Sie z.B. das Vektorfeld $X = (x^1)^2 \frac{\partial}{\partial x^1} \in \mathscr{X}(\mathbb{R}^2)$.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.