Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Mara Ungureanu
Mathematisches Institut
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Differentialgeometrie I
WS 2020/21
25. November, 2020

Übungsblatt 4

Abgabe: 2. Dezember, 2020, 12:00 Uhr

Aufgabe 13. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension n.

a) (1 Punkt) Zeigen Sie: V trägt die Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit der Dimension n.

Hinweis: Betrachten Sie Isomorphismen von Vektorräumen $\xi : V \to \mathbb{R}^n$.

Seien $u, v, w \in V$ und $\xi = (x^1, \ldots, x^n)^T : V \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Karte auf V. Betrachten Sie für $u, v \in V$ die glatte Kurve γ_v^u auf V, die durch $\gamma_v^u(t) := u + tv$ definiert ist.

b) (1 Punkt) Zeigen Sie:

$$v_{\gamma_v^u} = \sum_{i=1}^{n} x^i(v) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_u .$$

Hinweis: Nutzen Sie Aufgabe 11a) und die Linearität der Koordinatenfunktionen x^i.

c) (1 Punkt) Folgern Sie aus Teil b), dass für jedes $u \in V$ die Abbildung $v \mapsto v_{\gamma_v^u}$ ein Isomorphismus von Vektorräumen $V \simeq T_uV$ ist.

d) (1 Punkt) Zeigen Sie: Die Abbildung $v_{\gamma_v^u} \mapsto v_{\gamma_v^w}$ ist ein Isomorphismus von Vektorräumen $T_uV \simeq T_wV$.

Aufgabe 14. Seien $(x^1, \ldots, x^n)$ die Standardkoordinaten auf $\mathbb{R}^n$ und $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein homogensa Polynom vom Grad $r \geq 1$, d.h.

$$F(x^1, \ldots, x^n) = \sum_{j_1+\cdots+j_n=r} a_{j_1,\ldots,j_n} (x^1)^{j_1} \cdots (x^n)^{j_n},$$

wobei $a_{j_1,\ldots,j_n} \in \mathbb{R}$ und $j_1, \ldots, j_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Darüber hinaus habe F mindestens einen positiven Wert.

a) (1 Punkt) Zeigen Sie: $rF(p) = \left(x^1 \frac{\partial F}{\partial x^1}\right)(p) + \cdots + \left(x^n \frac{\partial F}{\partial x^n}\right)(p)$ für alle $p \in \mathbb{R}^n$.

b) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass $\{p \in \mathbb{R}^n \mid F(p) = 1\}$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $n-1$ von $\mathbb{R}^n$ ist.

Hinweis: Nutzen Sie den Satz vom regulären Wert.

Aufgabe 15. Seien M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\pi : E \to M$ ein glattes Vektorbündel vom Rang k. Betrachten Sie drei lokale Trivialisierungen $\varphi_i : U_i \times \mathbb{R}^k \to \pi^{-1}(U_i)$, $\varphi_j : U_j \times \mathbb{R}^k \to \pi^{-1}(U_j)$, und $\varphi_l : U_l \times \mathbb{R}^k \to \pi^{-1}(U_l)$ mit $U_i \cap U_j \cap U_l \neq \emptyset$. Zeigen Sie:

a) (2 Punkte) Die Übergangsfunktionen $\tau^{ij} : U_i \cap U_j \to GL_k(\mathbb{R})$ sind glatt.

Hinweis: Betrachten Sie die Karte aus Beispiel 1.1.6 für $GL_k(\mathbb{R})$ und nutzen Sie, dass $\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j$ glatt ist.

b) (2 Punkte) Die Übergangsfunktionen erfüllen die folgenden Bedingungen:

i) $\tau_q^{ii} = \mathbb{1}$ für alle $q \in U_i$,

ii) $(\tau^{ij} \circ \tau^{ji})_q = \mathbb{1}$ für alle $q \in U_i \cap U_j$,

iii) $(\tau^{ij} \circ \tau^{jl} \circ \tau^{li})_q = \mathbb{1}$ für alle $q \in U_i \cap U_j \cap U_l$.

Aufgabe 16. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\{\xi_i : U_i \to \xi_i(U_i) \mid i \in I\}$ ein glatter Atlas auf M. Betrachten Sie eine Menge glatter Abbildungen $\{\widetilde{\tau}^{ij} : U_i \cap U_j \to GL_k(\mathbb{R})\}_{i,j \in I}$, die die Bedingungen i), ii), iii) aus Aufgabe 15b) erfüllen. Betrachten Sie den Quotientenraum

$$\widetilde{E} = \Big(\bigsqcup_{i \in I} (\{i\} \times U_i \times \mathbb{R}^k) \Big) / \sim,$$

wobei $(i, q, v) \sim (j, q, \widetilde{\tau}_q^{ji}(v))$ für alle $i, j \in I$, $q \in U_i \cap U_j$, $v \in \mathbb{R}^k$.

a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

b) (3 Punkte) Betrachten Sie die Abbildung $\widetilde{\pi} : \widetilde{E} \to M$, die durch $[(i, q, v)] \mapsto q$ gegeben ist. Versehen Sie $\widetilde{E}$ mit der Struktur eines glatten Vektorbündels mit Bündelprojektion $\widetilde{\pi}$.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis die Quotiententopologie nutzen. Mit dieser Topologie ist die kanonische Projektion $\sigma : (i, q, v) \mapsto [(i, q, v)]$ stetig, und U ist eine offene Menge von $\widetilde{E}$ genau dann, wenn $\sigma^{-1}(U) \subseteq \bigsqcup_{i \in I} \big(\{i\} \times U_i \times \mathbb{R}^k\big)$ offen ist.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.