Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Mara Ungureanu
Mathematisches Institut
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Differentialgeometrie I
WS 2020/21
18. November, 2020

Übungsblatt 3

Abgabe: 25. November, 2020, 12:00 Uhr

Aufgabe 9. a) (2 Punkte) Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit.
Zeigen Sie: Ist $\xi : U \to \xi(U),\ \xi(p) = (x^1, \ldots, x^n)^T(p)$ für alle $p \in U$, eine Karte vom M, so ist für $1 \leq m \leq n$ die Menge

$$V_m := \{p \in U \mid x^{m+1}(p) = \cdots = x^n(p) = 0\}$$

eine glatte Mannigfaltigkeit mit Atlas aus einer einzigen Karte $\widetilde{\xi}(p) := (x^1, \ldots, x^m)^T(p)$.

b) (2 Punkte) Seien M und N zwei glatte Mannigfaltigkeiten, $P \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit mit der induzierten Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit und $F : N \to M$ eine glatte Abbildung mit $F(N) \subset P$. Zeigen Sie, dass $F : N \to P$ auch glatt ist.

Aufgabe 10. a) (1 Punkt) Zeigen Sie: $GL_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ ist offen, und für alle Matrizen $A \in GL_n(\mathbb{R})$ indentifiziert die Inklusion $T_A(GL_n(\mathbb{R}))$ mit $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$.

b) (1 Punkt) Zeigen Sie: Für jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ ist die Linksmultiplikation

$$l_A : GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R}), \quad l_A(B) = AB$$

eine glatte Abbildung.

c) (2 Punkte) Zeigen Sie: Für jede Matrix $A \in GL_n(\mathbb{R})$ ist das Differential

$$D(l_A)_{\mathbb{1}} : T_{\mathbb{1}}(GL_n(\mathbb{R})) \to T_A(GL_n(\mathbb{R}))$$

bzgl. Standardkoordinaten auch durch Linkmultiplikation von Matrizen gegeben.

Hinweis: Für eine Kurve γ in $GL_n(\mathbb{R})$ ist $l_A \circ \gamma(t) = A\gamma(t)$.

Aufgabe 11. Seien $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und M eine glatte Mannigfaltigkeit. Darüber hinaus sei t die Standardkoordinate in $(-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R}^1$.

a) (2 Punkte) Seien $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ eine glatte Kurve, $t_0 \in (-\epsilon, \epsilon)$ und $\xi = (x^1, \ldots, x^n) : U \to \xi(U)$ eine Karte um $p = \gamma(t_0)$. Zeigen Sie:

$$\dot{\gamma}(t_0) := D\gamma_{t_0}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t_0}\Big) = \sum_{k=1}^n \dot{\gamma}^k(t_0) \frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_{\gamma(t_0)},$$

wobei $\gamma^k = x^k \circ \gamma$. Folgern Sie daraus, dass bzgl. der Basis $\Big(\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p\Big)$ von T_pM gilt: $v_\gamma = (\dot{\gamma}^1(t_0), \ldots, \dot{\gamma}^n(t_0))^T$.

Hinweis: Wenden Sie Lemma 1.3.3 aus der Vorlesung an.

b) (2 Punkte) Zeigen Sie für glatte Kurven $\gamma, \widetilde{\gamma} : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ mit $\gamma(0) = \widetilde{\gamma}(0) = p$: $\gamma \sim \widetilde{\gamma}$ genau dann, wenn für **jede** Karte $\xi : U \to \xi(U)$ um p gilt

$$\frac{d}{dt}\xi(\gamma(t))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\xi(\widetilde{\gamma}(t))\Big|_{t=0}.$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass für eine andere Karte $\widetilde{\xi}$ auf M gilt:

$$\frac{d}{dt}\widetilde{\xi}(\gamma(t))\Big|_{t=0} = D(\widetilde{\xi} \circ \xi^{-1})_{\xi(p)}\left(\frac{d}{dt}\xi(\gamma(t))\Big|_{t=0}\right).$$

Aufgabe 12. a) (1 Punkt) Sei $\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$ der Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$ mit der induzierten Topologie. Zeigen Sie, dass $\mathbb{S}^1$ eine glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist.

Hinweis: Betrachten Sie z.B. die Abbildung $f(x^1, x^2) = (x^1, (x^1)^2 + (x^2)^2 - 1)$ und zeigen Sie, dass f eine angepasste Karte an $\mathbb{S}^1$ für die offene Menge $U = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 > 0\}$ ergibt.

b) (1 Punkt) Sei $p = (a, b) \in \mathbb{S}^1$. Zeigen Sie: $T_p\mathbb{S}^1 = \{(v^1, v^2) \in T_p\mathbb{R}^2 \mid av^1 + bv^2 = 0\}$, wobei die $(v^1, v^2) \in T_p\mathbb{R}^2$ bzgl. der Basis aus Standardkoordinatenvektoren gegeben sind.

Hinweis: Betrachten Sie für jedes $(a, b) \in \mathbb{S}^1$ die glatte Kurve $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{S}^1$, wobei $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \gamma^2(t))$, $(\gamma^1(0), \gamma^2(0)) = (a, b)$, und leiten die Bedingung $(\gamma^1(t))^2 + (\gamma^2(t))^2 = 1$ ab.

c) (2 Punkte) Zeigen Sie: Die Inklusion $O(n) \hookrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ identifiziert den Tangentialraum $T_{\mathbb{1}}O(n)$ mit $\{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid A + A^T = 0\}$.

Hinweis: Betrachten Sie eine glatte Kurve γ in $O(n)$ mit $\gamma(0) = \mathbb{1}$ und argumentieren Sie wie in Teil a). Sie dürfen ohne Beweis nutzen, dass gilt: $O(n)$ ist eine glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ der Dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.