Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Mara Ungureanu
Mathematisches Institut
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Differentialgeometrie I
WS 2020/21
11. November, 2020

Übungsblatt 2

Abgabe: 18. November, 2020, 12:00 Uhr

Aufgabe 5. a) (2 Punkte) Seien M eine glatte Mannigfaltigkeit, I eine Indexmenge und $\mathcal{A} = \{\xi_i : U_i \to \xi_i(U_i) \mid i \in I\}$ ein glatter Atlas auf M. Sei $U \subset M$ eine offene Teilmenge. Zeigen Sie: U ist eine glatte Mannigfaltigkeit mit glattem Atlas

$$\{\xi_i|_{U_i \cap U} : U_i \cap U \to \xi_i(U_i \cap U) \mid i \in I\}.$$

b) (2 Punkte) Seien M und N zwei glatte Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie, dass das Kartesische Produkt $M \times N$ eine natürliche Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit trägt, so dass die Projektion $\pi : M \times N \to M$, $\pi(p, q) = p$ eine glatte Abbildung ist.

Hinweis: Man darf die Produkttopologie ohne Beweis nutzen. Die offenen Mengen dieser Topologie haben die Form $\cup_{j\in I}(U_j \times V_j)$ für jede Indexmenge I, wobei $U_j \subseteq M$ und $V_j \subseteq N$ offene Mengen sind.

Aufgabe 6. a) (2 Punkte) Sei $\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$ der Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$ mit der induzierten Topologie. Zeigen Sie, dass $\mathbb{S}^1$ kompakt ist.

Hinweis: Nutzen Sie ohne Beweis, dass gilt: Eine Menge K in $\mathbb{R}^n$ ist kompakt genau dann, wenn K abgeschlossen und beschränkt ist.

b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass ein Atlas auf $\mathbb{S}^1$ mindestens zwei Karten haben muss.

Hinweis: Untersuchen Sie, ob $\mathbb{S}^1$ homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ sein kann.

c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\mathbb{S}^1$ eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension 1 ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Polarkoordinaten: $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$.

Aufgabe 7. a) (2 Punkte) Betrachten Sie die folgenden glatten Atlanten auf $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{A}_{\mathrm{id}} = \{\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{A}_\varphi = \{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi(x) = x^3\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}_{\mathrm{id}}$ und $\mathcal{A}_\varphi$ zwei verschiedene Strukturen von glatten Mannigfaltigkeiten auf $\mathbb{R}$ induzieren und dass die glatten Mannigfaltigkeiten $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_{\mathrm{id}})$ und $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_\varphi)$ diffeomorph sind.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\{\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ kein glatter Atlas auf $\mathbb{R}$ ist.

b) (2 Punkte) Zeigen Sie mithilfe der folgenden glatten Atlanten auf $\mathbb{R}$:

$$\forall r \in \mathbb{R}_{>0} \colon \mathcal{A}_r = \{\varphi_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi_r(x) = x \text{ falls } x \leq 0 \text{ und } \phi_r(x) = rx \text{ falls } x \geq 0\},$$

dass es überabzählbar viele verschiedene Strukturen von glatten Mannigfaltigkeiten auf $\mathbb{R}$ gibt. Sind die entsprechenden glatten Mannigfaltigkeiten diffeomorph?

Aufgabe 8. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $P \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit.

a) (3 Punkte) Betrachten Sie zwei an P angepasste Karten $\xi_i = (x_i^1, \ldots, x_i^n)^T : U_i \to \xi_i(U_i)$ von M, wobei $i \in \{1, 2\}$ und die induzierten Karten von P mit

$$\widetilde{\xi}_i : U_i \cap P \to \widetilde{\xi}_i(U_i \cap P), \; q \mapsto (x_i^1, \ldots, x_i^m)(q)$$

bezeichnet seien. Zeigen Sie, dass die obigen Karten von P glatt überlappen, d.h., dass

$$\widetilde{\xi}_1 \circ \widetilde{\xi}_2^{-1} : \widetilde{\xi}_2(U_1 \cap U_2 \cap P) \to \widetilde{\xi}_1(U_1 \cap U_2 \cap P)$$

und

$$\widetilde{\xi}_2 \circ \widetilde{\xi}_1^{-1} : \widetilde{\xi}_1(U_1 \cap U_2 \cap P) \to \widetilde{\xi}_2(U_1 \cap U_2 \cap P)$$

glatt sind.

b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die von M auf P induzierte Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit eindeutig bestimmt ist.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.