Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Mara Ungureanu
Mathematisches Institut
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Differentialgeometrie I
WS 2020/21
3. Februar, 2021

Übungsblatt 12

Dieses Blatt ist unbewertet.

Aufgabe 45. Seien (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und Ric die Ricci-Krümmung.

a) Sei $\xi = (x^1, \ldots, x^n)^T : U \to \xi(U)$ eine Karte von M. Dann gilt für $R_{ij} := Ric(\partial_i, \partial_j)$:

$$R_{ij} = \sum_m R^m_{\ ijm}.$$

b) Sei nun (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n mit der Eigenschaft, dass für die Schnittkrümmung K gilt: $K = k$ überall, wobei $k \in \mathbb{R}$. Nutzen Sie die Symmetrie von Ric und Bemerkung 5.17 um zu zeigen, dass $Ric = (n-1)kg$.

Aufgabe 46. Seien (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und K, Ric, und s die Schnitt-, Ricci-, und Skalarkrümmung. Betrachten Sie eine andere Metrik $\widetilde{g} := r^2 g$ auf M, wobei $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Seien $\widetilde{K}$, $\widetilde{Ric}$, und $\widetilde{s}$ die Schnitt-, Ricci-, und Skalarkrümmung von $(M, \widetilde{g})$. Zeigen Sie:

$$\widetilde{K} = \frac{1}{r^2} K, \ \widetilde{Ric} = Ric, \ \widetilde{s} = \frac{1}{r^2} s.$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass die Christoffelsymbole von g und $\widetilde{g}$ gleich sind und folgern Sie daraus, dass $\widetilde{R}^m_{\ ijk} = R^m_{\ ijk}$, wobei R und $\widetilde{R}$ die Riemmannschen Krümmungstensoren bzgl. g und $\widetilde{g}$ bezeichnen.

Aufgabe 47. a) Zeigen Sie: $O(n) = \{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid A^T A = \mathbb{1}\}$ ist eine glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ der Dimension $\frac{1}{2}n(n-1)$.

b) Zeigen Sie: $SU(n) = \{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n) \mid \bar{A}^T A = \mathbb{1} \text{ und } \det A = 1\}$ ist eine glatte Untermannigfaltigkeit der Dimension $n^2 - 1$ von $U(n)$ und damit eine Lie Gruppe.

Hinweis: Nutzen Sie Beispiel 1.4.9.

c) Betrachten Sie die Einheitssphäre $\mathbb{S}^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}^4$, dargestellt als

$$\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid \|z\|^2 + \|w\|^2 = 1\}.$$

Sie dürfen ohne Beweis nutzen, dass $\mathbb{S}^3$ eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension 3 ist. Zeigen Sie: Die Abbildung $\Phi : \mathbb{S}^3 \to SU(2)$, die durch

$$\Phi(z, w) = \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$$

definiert ist, ist ein Diffeomorphismus.

Aufgabe 48. Sei

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \subset GL_n(\mathbb{R})$$

mit der von $GL_n(\mathbb{R})$ ererbten Struktur einer Mannigfaltigkeit. Sie dürfen als bekannt voraussetzen, dass H eine Untermannigfaltigkeit von $GL_n(\mathbb{R})$ ist.

a) Zeigen Sie: H ist diffeomorph zu $\mathbb{R}^3$, und $(H, \cdot)$ ist eine Lie-Gruppe.

b) Sei $\xi = (x, y, z)\colon H \to \mathbb{R}^3$ der Diffeomorphismus aus Teil a), der im Folgenden als Karte für H verwendet werden soll. Drücken Sie die Vektorfelder

$$A = \frac{\partial}{\partial x}, \; B = \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z} \text{ und } C = \frac{\partial}{\partial z}$$

als Matrizen aus. Zeigen Sie, dass diese Vektorfelder links-invariant sind.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.