Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Mara Ungureanu
Mathematisches Institut
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Differentialgeometrie I
WS 2020/21
27. Januar, 2021

Übungsblatt 11

Abgabe: 3. Februar, 2021, 12:00 Uhr
Das ist das letzte bewertete Übungsblatt

Aufgabe 41. a) (2 Punkte) Sei $F : M \to N$ ein Diffeomorphismus zwischen glatten Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie:

$$\forall X, Y \in \mathscr{X}(M)\colon DF([X,Y]) = [DF(X), DF(Y)].$$

Hinweis: Nutzen Sie den Ausdruck in Koordinaten aus Proposition 4.1.3. Für ein koordinatenfreies Argument nutzen Sie Proposition 2.2.7 und Definition 1.2.3.

b) (2 Punkte) Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n. Zeigen Sie: Bezüglich lokaler Koordinaten $\xi = (x^1, \dots, x^n)^T : U \to \xi(U)$ hat der Riemannsche Krümmungstensor R genau $n^2(n^2-1)/12$ unabhängige Komponenten R_{ijkl}.

Hinweis: Nutzen Sie Proposition 5.10.

Aufgabe 42. Sei $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ mit der von den Standard-Strukturen von $\mathbb{R}^3$ induzierten Struktur einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Weiter seien $p \in \mathbb{S}^2$, $v \in T_p\mathbb{S}^2$ mit $\|v\| = 1$, und γ die nicht konstante Geodätische mit maximalem Definitionsbereich I so, dass $\gamma(0) = p$, $\dot\gamma(0) = v$ (vgl. Aufgabe 34 b)). Wie im Beispiel 2.3.3 und in Aufgabe 34 b) verwenden wir hier für $v \in T_p\mathbb{S}^2$ mit $T_p\mathbb{S}^2 \subset T_p\mathbb{R}^3$ die Koordinatendarstellung $v = (v^1, v^2, v^3)^T$ bzgl. der Standardbasis $(\partial_1|_p, \partial_2|_p, \partial_3|_p)$ von $T_p\mathbb{R}^3$ und identifizieren v mit $(v^1, v^2, v^3)^T \in \mathbb{R}^3$, $v \perp p$.

a) (1 Punkt) Betrachten Sie einen Tangentialvektor $u \in T_p\mathbb{S}^2$ mit $u \perp v$ und $\|u\| = 1$. Zeigen Sie, dass

$$Y(t, \tau) = \cos t \cdot p + \sin t \cdot (\cos\tau \cdot v + \sin\tau \cdot u),\ t \in I,\ \tau \in (-\delta, \delta)$$

eine geodätische Variation von γ ist.

b) (1 Punkt) Betrachten Sie den Koordinatenausdruck $u = \sum_{j=1}^3 u^j \partial_j|_p$. Zeigen Sie: Das von Y induzierte Jacobi-Vektorfeld ist $Z(t) = \sin t \cdot U(t)$ mit $U(t) = \sum_{j=1}^3 u^j \partial_j|_{\gamma(t)}$.

c) (2 Punkte) Zeigen Sie: $K(v, u) = 1$.

Hinweis: Nutzen Sie Lemma 5.6 (1) und Teil b) um zu zeigen, dass $R_{v,u}v = u$.

Aufgabe 43. Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n.

a) (2 Punkte) Es seien $\xi = (x^1, \dots, x^n)^T : U \to \xi(U)$ Riemannsche Normalkoordinaten um $p \in U$ zur Orthonormalbasis $(e_1, \dots, e_n)$ von T_pM und $\widetilde{U} \subset T_pM$ mit $0 \in \widetilde{U}$ so, dass $\exp_p : \widetilde{U} \to U$ ein Diffeomorphismus ist. Weiter seien $y \in \widetilde{U}$ und $q = \exp_p(y)$. Zeigen Sie:

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}\colon \partial_j|_q = \frac{d}{ds}\exp_p(y + se_j)|_{s=0}.$$

Hinweis: Verwenden Sie Definition 1.2.3, um zu zeigen: $\partial_j|_q = \dot c_j(0)$ (Richtungsableitung entlang c_j), wobei $c_j : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ mit $x^k(c_j(s)) = x^k(q) + s\delta_{jk}$ für alle k.

b) (2 Punkte) Mit den Notationen von Definition 4.3.6 zeigen Sie, dass die Menge $\mathscr{D}_p$ sternförmig bzgl. 0 ist, d.h. für alle $v \in \mathscr{D}_p$ und $\lambda \in [0,1]$ gilt $\lambda v \in \mathscr{D}_p$.

Hinweis: Nutzen Sie Bemerkung 4.3.7, insbesondere dass für $\gamma_v : I \to M$ wie in Definition 4.3.6 und für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\gamma_{\lambda v}(t) = \gamma_v(\lambda t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $\lambda t \in I$.

Aufgabe 44. Seien (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\gamma : I \to M$ eine Geodätische, wobei $0 \in I$. Betrachten Sie eine geodätische Variation $Y : I \times (-\delta, \delta) \to M$ von γ, das zugehörige Jacobi-Feld $Z(t)$, und eine Karte $\xi = (x^1, \ldots, x^n)^T : U \to \xi(U)$ auf M. Setzen Sie $c^j := x^j \circ Y$ und $Y(t, \tau) = c_t(\tau) = \gamma_\tau(t)$ wie im Beweis von Lemma 4.3.16.

a) (1 Punkt) Zeigen Sie:

$$\frac{D}{d\tau}\frac{D}{dt}\partial_i = \sum_j \Big(\frac{\partial^2 c^j}{\partial\tau\partial t}(t,\tau) D_{\partial_j}\partial_i + \frac{\partial c^j}{\partial t}(t,\tau) \sum_k \frac{\partial c^k}{\partial \tau}(t,\tau) D_{\partial_k} D_{\partial_j}\partial_i \Big). \tag{1}$$

b) (2 Punkte) Zeigen Sie:

$$\frac{D}{dt}\frac{D}{d\tau}\partial_i - \frac{D}{d\tau}\frac{D}{dt}\partial_i = R_{c_t'(\tau),\dot\gamma_\tau(t)}\partial_i$$

Hinweis: Tauschen Sie $\tau \leftrightarrow t$ und $j \leftrightarrow k$ in (1) aus und ziehen Sie die neue Gleichung von (1) ab.

c) (1 Punkt) Folgern Sie, dass $\frac{D}{dt}\frac{D}{dt} Z(t) = R_{Z(t),\dot\gamma(t)}\dot\gamma(t)$.

Hinweis: Nutzen Sie die Hinweise im Beweis von Lemma 5.6 (1) und werten Sie in $\tau = 0$ aus. Es gilt: $c_t'(0) = Z(t)$ und $\dot\gamma_0(t) = \dot\gamma(t)$.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.