Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Mara Ungureanu
Mathematisches Institut
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Differentialgeometrie I
WS 2020/21
4. November, 2020

Übungsblatt 1

Abgabe: 11. November, 2020, 12:00 Uhr

Aufgabe 1.

a) (1 Punkt) Sei $\mathbb{R}$ versehen mit der Standardtopologie und $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Zeigen Sie: die folgenden Definitionen der Stetigkeit einer Funktion $f : U \to \mathbb{R}^m$ sind äquivalent:

Definition 1: Die Funktion $f : U \to \mathbb{R}^m$ ist stetig genau dann, wenn für jede offene Menge $V \subset \mathbb{R}^m$ auch $f^{-1}(V)$ offen ist.

Definition 2: Die Funktion $f : U \to \mathbb{R}^m$ ist stetig genau dann, wenn

$$\forall p \in U, \forall \epsilon > 0 \;\exists \delta > 0\colon \forall q \in U \text{ falls } \|p - q\| < \delta, \text{ dann } \|f(p) - f(q)\| < \epsilon.$$

b) (1 Punkt) Sei $f : X \to Y$ eine Funktion zwischen zwei topologischen Räume X und Y. Zeigen Sie: f ist genau dann stetig, wenn gilt: Für jede abgeschlossene Menge $A \subset Y$ ist $f^{-1}(A)$ auch abgeschlossen.

c) (1 Punkt) Seien $f : X \to Y$ eine stetige Funktion zwischen zwei topologischen Räume und $A \subset X$ eine kompakte Teilmenge. Zeigen Sie: $f(A)$ ist eine kompakte Teilmenge von Y.

d) (1 Punkt) Sei X ein kompakter topologischer Raum und $A \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge. Zeigen Sie, dass A auch kompakt ist.

Aufgabe 2.

a) (1 Punkt) Seien S eine Menge und $\mathcal{O}$ eine Kollektion von Teilmengen von S. Zeigen Sie: $\mathcal{O}$ definiert eine Topologie auf S genau dann wenn

i) Die Komplemente von S und $\emptyset$ in S sind Elemente von $\mathcal{O}$.

ii) Für alle $A, B \subset S$ mit $S \setminus A \in \mathcal{O}$ und $S \setminus B \in \mathcal{O}$ gilt: $S \setminus (A \cup B) \in \mathcal{O}$.

iii) Für jede Indexmenge I gilt:

$$\Big(\forall j \in I\colon S \setminus A_j \in \mathcal{O}\Big) \Rightarrow S \setminus \big(\cap_{j \in I} A_j\big) \in \mathcal{O}.$$

b) (2 Punkte) Seien X ein Hausdorff-Raum und $K \subset X$ eine kompakte Teilmenge. Zeigen Sie, dass K abgeschlossen ist.

c) (1 Punkt) Seien X und Y zwei topologische Räume, wobei X kompakt sei und Y Hausdorff. Zeigen Sie: Jede bijektive, stetige Funktion $f : X \to Y$ ist ein Homöomorphismus.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Seien $\xi : U \to \xi(U)$ eine Karte von $\mathbb{R}^n$ mit Koordinatenfunktionen x^j und $V \subset \mathbb{R}^n$ offen. Zeigen Sie: $\phi : V \to U$ ist stetig genau dann, wenn alle $x^j \circ \phi$ stetig sind.

Aufgabe 4. Sei $D_r(p)$ die offene Kugel in $\mathbb{R}^n$ mit Radius r um p. Zeigen Sie:

a) (1 Punkt) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(t) := \begin{cases} e^{-1/t} & \text{falls } t > 0, \\ 0 & \text{falls } t \leq 0, \end{cases}$$

ist glatt.

b) (2 Punkte) Es gibt eine glatte Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

i) $h(t) \equiv 1$ falls $t \leq 1$,

ii) $0 < h(t) < 1$ falls $1 < t < 2$,

iii) $h(t) \equiv 0$ falls $t \geq 2$.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $\frac{f(2-t)}{f(2-t)+f(t-1)}$.

c) (1 Punkt) Es gibt eine glatte Funktion $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

i) $0 \leq H(x) \leq 1$ überall,

ii) $H \equiv 1$ auf $D_1(0)$,

iii) $H \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus D_2(0)$.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.