Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Mara Ungureanu
Mathematisches Institut
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Funktionentheorie II
WS 2019/20

Übungsblatt 9

Aufgabe 32. a) Beweisen Sie für die normierten Eisenstein Reihen E_k:

i) $E_8 = E_4^2$, $E_{10} = E_4 E_6$.

ii) $E_6(\rho) \neq 0$, $E_4(i) \neq 0$, wobei $\rho = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Beweisen Sie auf direktem Weg mit kombinatorischen Mitteln für $k \in 2\mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$\#\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid 4a + 6b = k\} = \begin{cases} \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor & \text{falls } k \equiv 2 \mod 12 \\ \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor + 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 33. Seien (g_2, g_3), $(\tilde{g}_2, \tilde{g}_3) \in \mathbb{C}^2$ mit $g_2^3 \neq 27 g_3^2$, $\tilde{g}_2^3 \neq 27\tilde{g}_3^2$, und betrachten Sie die entsprechenden Kubiken in Weierstrassform C_{g_2,g_3} und $C_{\tilde{g}_2,\tilde{g}_3}$. Zeigen Sie: C_{g_2,g_3} und $C_{\tilde{g}_2,\tilde{g}_3}$ sind biholomorph genau dann, wenn $a, b \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{C}^*$ mit

$$(\tilde{g}_2, \tilde{g}_3) = (e^{2\pi i a/3}\alpha^2 g_2, (-1)^b \alpha^3 g_3)$$

existieren. Bestimmen Sie für solche (g_2, g_3), $(\tilde{g}_2, \tilde{g}_3)$ explizit eine biholomorphe Abbildung $C_{g_2,g_3} \to C_{\tilde{g}_2,\tilde{g}_3}$.

Aufgabe 34. Betrachten Sie die sogenannte Cayley-Transformation:

$$c : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}, \ \tau \mapsto \frac{\tau - i}{\tau + i}.$$

Zeigen Sie:

a) $c(i) = 0,\ c(1) = -i,\ c(0) = -1$.

b) Die Cayley-Transformation bildet die obere Halbebene $\mathfrak{H}$ bijektiv auf den offenen Einheitskreis $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ ab. Bestimmen Sie die Umkehrabbildung.