Übungsblatt 8

Aufgabe 29. a) Beweisen Sie, dass eine 1:1 Korrespondenz besteht zwischen Gitterfunktionen f vom Gewicht k und Abbildungen $F : \mathfrak{H} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$F(A.\tau) = (c\tau + d)^k F(\tau) \quad \forall A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}), \tau \in \mathfrak{H}.$$

b) Zeigen Sie: ist F schwach modular vom Gewicht k mit ungeradem k , dann gilt $F \equiv 0$.

Aufgabe 30 (Proposition 3.1.8). Es seien Modulfunktionen F, G vom Gewicht $k, l \in \mathbb{Z}$ gegeben. Dann gilt:

a) $F \cdot G$ ist eine Modulfunktion vom Gewicht $k+l$; sind F und G Modulformen (Spitzenformen), so ist auch $F \cdot G$ Modulform (Spitzenform).

b) Falls $k = l$, dann ist auch $F + G$ Modulfunktion vom Gewicht k ; falls $F, G \in M_k$, dann folgt $F + G \in M_k$, und falls $F, G \in M_k^0$, dann $F + G \in M_k^0$.

Daraus folgt insbesondere: $\bigoplus_{k=-\infty}^{\infty} M_k$ ist eine (gradierte) Algebra über $\mathbb{C}$ mit (gradierter) Unter algebra $\bigoplus_{k=-\infty}^{\infty} M_k^0$.

Aufgabe 31. a) Zeigen Sie: falls $k \in 2\mathbb{N}$, $k \geq 2$, dann gibt es eine kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow M_k^0 \hookrightarrow M_k \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow 0.$$

b) Seien $\rho := -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ und E_{2k} die normierte Eisenstein Reihe für $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Zeigen Sie:

$$E_4(\rho) = 0, \quad E_6(i) = 0.$$