Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Mara Ungureanu
Mathematisches Institut
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Funktionentheorie II
WS 2019/20

Übungsblatt 7

In folgenden seien $\mathfrak{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid Im(\tau) > 0\}$ die obere Halbebene und $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm\mathbb{1}\}$ die Modulgruppe. Für eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ betrachten Sie die durch A definierte Möbiustransformation $\mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$, $\tau \mapsto A.\tau = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$.

Aufgabe 24. Konstruieren Sie stetige Lifts $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zu (stetigen) Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^* \cong \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$ und folgern Sie, dass für stetiges $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ Lifts $F : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ existieren.

Aufgabe 25. a) Zeigen Sie: $\forall A, B \in SL_2(\mathbb{Z})$ und $\forall \tau \in \mathfrak{H}$ gilt: $(AB).\tau = A.(B.\tau)$.

b) Zeigen Sie: die Modulgruppe Γ operiert effektiv auf $\mathfrak{H}$, d.h. falls $[A] \in \Gamma$ mit $A.\tau = \tau, \forall \tau \in \mathfrak{H}$, dann folgt $[A] = 1$.

c) Zeigen Sie: die Gruppe $PSL_2(\mathbb{C})$ operiert effektiv auf $\overline{\mathbb{C}}$ durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.z := \frac{az+b}{cz+d}, \forall z \in \overline{\mathbb{C}}.$$

Dabei ist $PSL_2(\mathbb{Z}) = Aut(\mathbb{CP}^1)$.

Darüber hinaus zeigen Sie, dass zu paarweise verschiedenen $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ genau ein $[A] \in PSL_2(\mathbb{C})$ mit $A.0 = z_1$, $A.1 = z_2$, $A.\infty = z_3$ existiert.

Aufgabe 26. Sei $A \in SL_2(\mathbb{Z}) \setminus \{\pm\mathbb{1}\}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) Die Abbildung $\mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$, $\tau \mapsto A.\tau$ besitzt einen Fixpunkt.

ii) $(tr(A))^2 < 4$.

iii) $tr(A) \in \{0, \pm 1\}$.

iv) $A^2 = \pm\mathbb{1}$ oder $A^3 = \pm\mathbb{1}$.

Aufgabe 27. Zeigen Sie: Gitterfunktionen vom ungeraden Gewicht verschwinden identisch.

Aufgabe 28. Seien $A, B, C, \Delta \in \mathbb{Z}$ mit $ggT(A, B, C) = 1$, $A > 0$, $B^2 - 4AC = \Delta < 0$. Betrachten Sie den Raum

$$\mathfrak{Q}_\Delta := \{Q \in \mathbb{Z}[x, y] \mid Q(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 \text{ und } A, B, C \text{ wie oben}\}$$

und die Gruppenoperation von Γ auf $\mathfrak{Q}_\Delta$, die durch

$$\gamma.Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.Q(x, y) := Q(ax + by, cx + dy) \quad \forall [\gamma] \in \Gamma$$

definiert ist.

a) Zeigen Sie: $Q \sim Q' \Leftrightarrow Q = \gamma.Q'$ für ein $[\gamma] \in \Gamma$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathfrak{Q}_\Delta$.

b) Für jedes $Q \in \mathfrak{Q}_\Delta$, finden Sie die eindeutige Wurzel $\mathfrak{z}_Q$ von $Q(x, 1) = 0$, die in $\mathfrak{H}$ liegt.

c) Zeigen Sie: $\mathfrak{z}_{\gamma.Q} = \gamma^{-1}.\mathfrak{z}_Q$ für alle $[\gamma] \in \Gamma$ und $Q \in \mathfrak{Q}_\Delta$.

d) Folgern Sie, dass $Q_\Delta/\sim$ endlich ist.