Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Mara Ungureanu
Mathematisches Institut
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Funktionentheorie II
WS 2019/20

Übungsblatt 6

Aufgabe 19. Sei $\widetilde{X} = X \cup \{\infty\}$ der projektive Abschluss von $X := \{(x : y : 1) \in \mathbb{CP}^2 \mid y^2 = Q(x)\}$, wobei $Q \in \mathbb{C}[x]$ ein Polynom vom Grad $d \in \mathbb{N}$ ohne mehrfache Nullstellen ist.

a) Zeigen Sie: falls $d \in \{1, 2\}$, dann gilt $\widetilde{X} \cong \mathbb{CP}^1$.

b) Seien nun $d \geq 1$ und $\check{U} := \{(x : y : 1) \in X \mid x \neq 0\}$. Betrachten Sie die Abbildungen $X \to \mathbb{C}^2$, $(x : y : 1) \mapsto (x, y)$ und $\check{U} \to \mathbb{C}^2$, $(x : y : 1) \mapsto \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x^m}\right)$, falls $d = 2m$ oder $d = 2m - 1$.

   i) Konstruieren Sie U mit $U \supset \check{U}$, so dass $\widehat{X} = X \cup U$ eine Riemannsche Fläche ist.

   ii) Zeigen Sie, dass die Abbildung $pr : \widehat{X} \to \overline{\mathbb{C}}$, $(x : y : 1) \mapsto x$, $\check{U} \setminus U \mapsto \infty$ surjektiv ist, und dass endlich viele Punkte $e_1, \ldots, e_N \in \overline{\mathbb{C}}$ existieren mit

$$\#\{pr^{-1}(z)\} = \begin{cases} 1, & \text{falls } z \in \{e_1, \ldots, e_N\}, \\ 2, & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Was ist N?

Aufgabe 20. Seien $E \cong \mathbb{C}/\Lambda$ eine Kubik in Weierstrass Form und $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ein Gitter wie in Definition 1.1.1 b). Betrachten Sie die in der Vorlesung (2.2.3) gegebene Beschreibung der Gruppenstruktur auf E: zu $P, Q \in E$ ist $P+Q$ wie folgt definiert: seien L die eindeutig bestimmte Gerade durch P, Q, und $R = (r_0 : r_1 : r_2) \in E$ ein Punkt mit $L \cap E = \{P, Q, R\}$ (L tangential an E in doppelt aufgeführten Punkten). Dann ist $P + Q = -R$.

a) Laut Vorlesung gilt: $-R = (r_0 : -r_1 : r_2)$, falls $r_2 = 1$. Zeigen Sie: dies gilt auch, wenn $R = (0 : 1 : 0)$.

b) Bestimmen Sie L und $\pm R$ explizit, falls

   i) $Q = (0 : 1 : 0)$.

   ii) $P = Q \in \{(e_j : 0 : 1), (0 : 1 : 0)\}$, wobei e_j die Halbperiodenwerte $e_1 = \mathfrak{p}_\Lambda(\omega_1/2)$, $e_2 = \mathfrak{p}_\Lambda(\omega_2/2)$, und $e_3 = \mathfrak{p}_\Lambda((\omega_1 + \omega_2)/2)$ bezeichnen, für $j \in \{1, 2, 3\}$.

Aufgabe 21. Seien $E \cong \mathbb{C}/\Lambda$ eine Kubik in Weierstrass Form und $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ein Gitter wie in Definition 1.1.1 b).

a) Nutzen Sie die von $\mathbb{C}/\Lambda$ induzierte Gruppenstruktur auf E um zu zeigen, dass für alle $z_1, z_2, z_1 + z_2 \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ und $[z_1] \neq [z_2]$:

$$\mathfrak{p}_\Lambda(z_1 + z_2) + \mathfrak{p}_\Lambda(z_1) + \mathfrak{p}_\Lambda(z_2) = \frac{1}{4}\left(\frac{\mathfrak{p}'_\Lambda(z_1) - \mathfrak{p}'_\Lambda(z_2)}{\mathfrak{p}_\Lambda(z_1) - \mathfrak{p}_\Lambda(z_2)}\right)^2.$$

b) Folgern Sie für $z \in \mathbb{C}$: falls $z \notin \frac{1}{2}\Lambda$, gilt

$$2\mathfrak{p}_\Lambda(z) + \mathfrak{p}_\Lambda(2z) = \frac{1}{4}\left(\frac{\mathfrak{p}''_\Lambda(z)}{\mathfrak{p}'_\Lambda(z)}\right)^2.$$

Aufgabe 22. Sei $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ der Körper mit 3 Elementen.

a) Zeigen Sie: es gibt eine 1:1 Korrespondenz zwischen dem affinen zweidimensionalen Raum $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_3)$ und die Wendepunktkonfiguration elliptischer Kurven.

b) Sei $\mathbb{A}_3 := \mathbb{F}_3^3$. Zeigen Sie: es gibt eine 1:1 Korrespondenz zwischen dem projektiven zweidimensionalen Raum $\mathbb{P}(\mathbb{A}_3)$ und den Geraden der Wendepunktkonfiguration elliptischer Kurven plus eine unendlich ferne Gerade.

Aufgabe 23. Es sei E eine glatte Kubik in Weierstrass Form. Zeigen Sie, dass die Konstruktion 2.2.3 aus der Vorlesung auf E eine wohldefinierte kommutative Verknüpfung mit neutralem Element definiert.