Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Mara Ungureanu
Mathematisches Institut
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Funktionentheorie II
WS 2019/20

Übungsblatt 5

Aufgabe 16. a) Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit und Y eine komplexe Hyperfläche in X. Zeigen Sie, dass Y auch eine komplexe Mannigfaltigkeit ist.

b) Sei nun $X := \{z \in \mathbb{CP}^n \mid z = (z^0 : \cdots : z^n), f(z^0, \ldots, z^n) = 0\}$, wobei $f \in \mathbb{C}[z^0, \ldots, z^n]$ ein homogenes Polynom mit $df_z \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ ist. Zeigen Sie, dass X wohldefiniert und eine komplexe Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 17. Sei $X := \{(x : y : z) \in \mathbb{CP}^2 \mid zy^2 = 4x^3 - g_2xz^2 - g_3z^3\}$, wobei $27g_3^2 \neq g_2^3$, eine Kubik in Weierstrass Form. Weiter sei $U_1 := \{[z] = (z^0 : z^1 : z^2) \in \mathbb{CP}^2 \mid z^1 \neq 0\}$ die erste affine Koordinatenumgebung. Zeigen Sie, dass

$$X \cap U_1 \cong \{(x, z) \in \mathbb{C}^2 \mid z = 4x^3 - g_2xz^2 - g_3z^3\}$$

glatt in $(0 : 1 : 0)$ ist.

Aufgabe 18. Sei X wie in Aufgabe 17. Seien Q_1, Q_2, Q_3 die (ggf. nicht unterschiedlichen) Schnittpunkte von X mit $\mathbb{CP}^2 \setminus U_1 = \{(x : 0 : z) \in \mathbb{CP}^2\}$. Berechnen Sie die Tangenten an X in Q_j für $j \in \{1, 2, 3\}$ und untersuchen Sie, ob Q_j ein Wendepunkt ist.