Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Mara Ungureanu
Mathematisches Institut
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Funktionentheorie II
WS 2019/20

Übungsblatt 4

In folgenden sei $C = \mathbb{C}/\Lambda$.
Definition: Es seien D_1, D_2 Divisoren auf C. Wir schreiben $D_1 \geq D_2$ falls $D_1 - D_2 \geq 0$ und $D_1 \leq D_2$ falls $D_2 - D_1 \geq 0$.

Aufgabe 12. Es seien D_1, D_2 zwei Divisoren auf C. Zeigen Sie:

a) Es existiert ein Divisor $\min(D_1, D_2) \in \mathscr{D}$ so dass

   i) $\min(D_1, D_2) \leq D_1$ und $\min(D_1, D_2) \leq D_2$,
   ii) Für alle Divisoren D auf C mit $D \leq D_1$ und $D \leq D_2$ gilt $D \leq \min(D_1, D_2)$.

b) Es existiert ein Divisor $\max(D_1, D_2) \in \mathscr{D}$ so dass

   i) $\max(D_1, D_2) \geq D_1$ und $\max(D_1, D_2) \geq D_2$,
   ii) Für alle Divisoren D auf C mit $D \geq D_1$ und $D \geq D_2$ gilt $D \geq \max(D_1, D_2)$.

c) $\mathscr{L}(D)$ ist ein endlich dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum für jedes $D \in \mathscr{D}$.

d) Für alle $D_1, D_2 \in \mathscr{D}$ gilt

$$\dim \mathscr{L}(D_1) + \dim \mathscr{L}(D_2) \leq \dim \mathscr{L}(\min(D_1, D_2)) + \dim \mathscr{L}(\max(D_1, D_2)).$$

Aufgabe 13. Zeigen Sie:

a) Für alle $f_1, f_2 \in \mathscr{K}_\Lambda^*$: $(f_1) = (f_2)$ genau dann wenn ein $c \in \mathbb{C}^*$ existiert, mit $f_1 = cf_2$.

b) Für alle $f_1, f_2 \in \mathscr{K}_\Lambda^*$: $(f_1 \cdot f_2) = (f_1) + (f_2)$, $\left(\frac{f_1}{f_2}\right) = (f_1) - (f_2)$ und $(f_1 + f_2) \geq \min((f_1), (f_2))$.

c) Für alle $f_1, f_2 \in \mathscr{K}_\Lambda^*$: falls $(f_1) - (f_2) \geq 0$, dann $(f_1) = (f_2)$.

Aufgabe 14. Sei $\mathbb{CP}^n$ der projektive Raum der Dimension n. Für $a \in \{0, \ldots, n\}$ seien $\zeta_a : U_a \to \mathbb{C}^n$ die affinen Koordinaten. Berechnen Sie die Koordinatenwechselfunktionen

$$\zeta_a \circ \zeta_b^{-1} : \zeta_b(U_a \cap U_b) \to \zeta_a(U_a \cap U_b)$$

und zeigen Sie, dass sie holomorph in allen Koordinaten sind.

Aufgabe 15. Zeigen Sie:

a) $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{CP}^n$ und $\mathbb{C}/\Lambda$ sind komplexe Mannigfaltigkeiten.

b) $\mathbb{CP}^1$ und $\mathbb{C}/\Lambda$ sind Riemannsche Flächen.

c) Jede komplexe Mannigfaltigkeit ist orientierbar.

d) Sind X und Y isomorphe komplexe Mannigfaltigkeiten, dann haben sie die gleiche Dimension.