Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Mara Ungureanu
Mathematisches Institut
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Funktionentheorie II
WS 2019/20

Übungsblatt 3

In folgenden seien $\Lambda = \{n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ ein von einer Basis (ω_1, ω_2) von $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$ mit $Im(\omega_1/\omega_2) > 0$ erzeugtes Gitter,

$$\mathfrak{p}_\Lambda(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right)$$

die Weierstrasssche $\mathfrak{p}$-Funktion und $e_1 := \mathfrak{p}_\Lambda(\omega_1/2)$, $e_2 := \mathfrak{p}_\Lambda(\omega_2/2)$, $e_3 := \mathfrak{p}_\Lambda((\omega_1+\omega_2)/2)$. Weiter sei $\sigma_\Lambda : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$\frac{\sigma_\Lambda'}{\sigma_\Lambda}(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z-\lambda} + \frac{z}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda} \right)$$

und $\sigma_\Lambda'(0) = 1$ die Weierstrasssche Sigma-Funktion.

Aufgabe 7. Bestimmen Sie eine Funktion $g_{\omega_1}(z)$ auf $\mathbb{C}$ mit den folgenden Eigenschaften:

i) g_{ω_1} ist meromorph auf $\mathbb{C}$.

ii) $\mathfrak{p}_\Lambda(z) - \mathfrak{p}_\Lambda(\omega_1/2) = g_{\omega_1}(z)^2$.

Betrachten Sie nun das von $(\omega_1, 2\omega_2)$ erzeugte Gitter $\widetilde{\Lambda}$. Zeigen Sie, dass g_{ω_1} eine elliptische Funktion bzgl. $\widetilde{\Lambda}$ ist.

Aufgabe 8. Sei c der kleinste Wert von $|\lambda|$ für $\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$. Für ein $r < 1$ nehmen wir an, dass z in einer Kreisscheibe vom Radius rc um 0 enthalten ist. Berechnen Sie die Laurent Reihenentwicklung von $\mathfrak{p}_\Lambda$ und $\mathfrak{p}_\Lambda'$ um 0 und zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned}\mathfrak{p}_\Lambda(z) &= \frac{1}{z^2} + 3s_4z^2 + 5s_6z^4 + 7s_8z^6 + \cdots \\ \mathfrak{p}_\Lambda'(z) &= -\frac{2}{z^3} + 6s_4z + 20s_6z^3 + 42s_8z^5 + \cdots,\end{aligned}$$

wobei $s_k := \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\lambda^k}$. Folgern Sie, dass $e_1 + e_2 + e_3 = 0$.

Aufgabe 9 (Additionstheorem für $\mathfrak{p}_\Lambda$)**.** Zeigen Sie: $\forall z, v \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ mit $z \neq v$:

$$\mathfrak{p}_\Lambda(z+v) + \mathfrak{p}_\Lambda(z) + \mathfrak{p}_\Lambda(v) = \frac{1}{4}\left(\frac{\mathfrak{p}_\Lambda'(z) - \mathfrak{p}_\Lambda'(v)}{\mathfrak{p}_\Lambda(z) - \mathfrak{p}_\Lambda(v)} \right)^2.$$

Nutzen Sie die obere Formel, um zu zeigen, dass

$$\mathfrak{p}_\Lambda\Big(z + \frac{\omega_1}{2}\Big) = e_1 + \frac{2e_1^2 + e_2e_3}{\mathfrak{p}_\Lambda(z) - e_1}.$$

Aufgabe 10. Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen kompakt gleichmäßig konvergent sind:

a) $\sum_{\lambda\in\Lambda\setminus\{0\}} \ln\Big(\big(1-\frac{z}{\lambda}\big)\exp\big(\frac{z}{\lambda}+\frac{1}{2}\big(\frac{z}{\lambda}\big)^2\big)\Big)$ für $z\in\mathbb{C}$.

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z+k}$ für $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_{<0}$.

c) $\sum_{k=1}^{\infty} kx^k$ für $x\in(-1,1)$. Ist diese Reihe auch gleichmäßig konvergent?

Aufgabe 11. Sei $\alpha\in\mathbb{C}^*$. Wie verhält sich σ_Λ unter einer Transformation $\Lambda\mapsto\alpha\Lambda$?