Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Mara Ungureanu
Mathematisches Institut
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Funktionentheorie II
WS 2019/20

Übungsblatt 2

In folgenden seien $\Lambda = \{n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ ein von einer Basis (ω_1, ω_2) von $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$ mit $Im(\omega_1/\omega_2) > 0$ erzeugtes Gitter und

$$\wp_\Lambda(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right)$$

die Weierstrasssche $\wp$-Funktion.

Aufgabe 4. Seien $e_1 = \wp_\Lambda(\omega_1/2)$, $e_2 = \wp_\Lambda(\omega_2/2)$, $e_3 = \wp_\Lambda((\omega_1+\omega_2)/2)$ die Halbperiodenwerte.

a) Zeigen Sie: e_1, e_2, e_3 sind paarweise verschieden.

b) Sei $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Wie verhalten sich e_1, e_2, e_3 unter eine Transformation $\Lambda \mapsto \alpha\Lambda$?

Aufgabe 5. a) Betrachten Sie den konstruktiven Beweis von Theorem 1.2.8, um einen Ausdruck für $\wp''_\Lambda$ bzgl. $\wp_\Lambda$ zu finden, ohne Rechnungen zu nutzen.

b) Nutzen Sie die Formel in Theorem 1.2.6, um einen Ausdruck für $\wp_\Lambda^{(n)}$ bzgl. $\wp_\Lambda$ zu geben, wobei (n) die n-te Ableitung bezeichnet.

Aufgabe 6 (Doppelreihensatz von Weierstrass)**.** Seien $f_j(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{nj}(z-c)^n$ Potenzreihen, die in einer Kreisscheibe B um $c \in \mathbb{C}$ konvergieren. Sei $F(z) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(z)$ eine kompakt gleichmäßig konvergente Reihe in B. Zeigen Sie: F hat in B die dort konvergente Potenzreihendarstellung

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-c)^n, \text{ wobei } b_n = \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} \in \mathbb{C}.$$

Überzeugen Sie sich, dass daraus folgt, dass man in einer Doppelreihe

$$F(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{nj}(z-c)^n \right)$$

die Summationen wie bei Polynomen vertauschen darf.