Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Mara Ungureanu
Mathematisches Institut
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Funktionentheorie II
WS 2019/20

Übungsblatt 13

Aufgabe 45. a) Beweisen Sie, dass jedes $N \in \mathbb{N}$ als Summe vierer Quadratzahlen geschrieben werden kann.
Hinweis: Betrachten Sie die Gleichung in Aufgabe 44 a) mit $k = 4$ und nutzen Sie die Formeln für Jacobi-Thetafunktionen aus 4.2.3–4.2.10 um zu zeigen, dass $Q_4(N) \geq 1$ für alle $N \in \mathbb{N}$.

b) Für $N, k \in \mathbb{N}$ definieren wir die folgenden Mengen von Partitionen und deren Kardinalitäten:

$$P(N) := \#\Big\{(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k \mid \sum_{i=1}^{k} n_i = N,\ 0 < n_1 \leq \dots \leq n_k\Big\},$$
$$\nu(N) := \#\Big\{(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k \mid \sum_{i=1}^{k} n_i = N,\ 0 < n_1 < \dots < n_k\Big\},$$
$$u(N) := \#\Big\{(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k \mid \sum_{i=1}^{k} n_i = N,\ 0 < n_1 \leq \dots \leq n_k,\ n_i \in 2\mathbb{N}+1\Big\}.$$

Laut Bemerkung 0.5 gilt:

$$\frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)} = \sum_{N=0}^{\infty} P(N) q^N.$$

Für $N < 0$ setzen wir $P(N) := 0$. Zeigen Sie:

i) Für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt: $\nu(N) = u(N)$.

ii) Für alle $M \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt: $\sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k P\Big(M - \frac{k}{2}(3k+1)\Big) = 0$.

Aufgabe 46. Für alle $\tau \in \mathfrak{H}$ und $z \in \mathbb{C}$ seien

$$\eta(\tau) := q^{\frac{1}{24}} \prod_{i=1}^{\infty}(1-q^n), \quad A(\tau, z) := -\frac{\vartheta_{11}(\tau, z)^2}{\eta(\tau)^6},$$
$$B(\tau, z) := 4\left(\frac{\vartheta_{00}(\tau, z)^2}{\vartheta_{00}(\tau, 0)^2} + \frac{\vartheta_{10}(\tau, z)^2}{\vartheta_{10}(\tau, 0)^2} + \frac{\vartheta_{01}(\tau, z)^2}{\vartheta_{01}(\tau, 0)^2}\right),$$
$$C(\tau, z) := -i\frac{\vartheta_{11}(\tau, 2z)}{\eta(\tau)^3}.$$

Darüber hinaus seien $\Lambda = \Lambda_\tau = \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$ und $\mathfrak{p}_\Lambda(z)$ die Weierstrasssche $\mathfrak{p}$-Funktion. Zeigen Sie:

a) $\vartheta_{00}(\tau, 0)\vartheta_{01}(\tau, 0)\vartheta_{10}(\tau, 0) = 2\eta(\tau)^3$ und $\vartheta'_{11}(\tau, 0) = -2\pi\eta(\tau)^3$.

b) $C(\tau, z) = -\frac{A(\tau,z)^2}{(2\pi i)^3}\mathfrak{p}'_\Lambda(z)$.

c) $B(\tau,z) = -\frac{3}{\pi^2}\mathfrak{p}_\Lambda(z)A(\tau,z)$.

d) $432C^2 = AB^3 - 3E_4A^3B + 2E_6A^4$.

e) $\vartheta_{10}(\tau,0) = 2\frac{\eta(2\tau)^2}{\eta(\tau)}$, $\vartheta_{00}(\tau,0) = \frac{\eta(\tau)^5}{\eta(\tau/2)^2\eta(2\tau)^2}$, $\vartheta_{01}(\tau,0) = \frac{\eta(\tau/2)^2}{\eta(\tau)}$.

Aufgabe 47 (Satz 4.3.1)**.** Zeigen Sie: $SL_2(\mathbb{Z})$ operiert durch Möbiustransformationen wie folgt auf $\mathfrak{H}\times\mathbb{C}$:

$$\forall A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}),\ (\tau,z)\in\mathfrak{H}\times\mathbb{C},\ A.(\tau,z) = \Big(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d}\Big).$$

Mit anderen Worten: Zeigen Sie

$$\forall A,\widetilde{A}\in SL_2(\mathbb{Z}) : A.(\widetilde{A}.(\tau,z)) = (A\widetilde{A}).(\tau,z),\quad \mathbb{1}.(\tau,z) = (\tau,z).$$

Aufgabe 48. Es sei $F:\mathfrak{H}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ holomorph. Für $k,m\in\mathbb{Z}$ definieren wir:

$$\forall A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) : (F|_{k,m}A)(\tau,z) := (c\tau+d)^{-k}\exp\Big(\frac{-2\pi imcz^2}{c\tau+d}\Big)F(A.(\tau,z)),$$
$$\forall (r,s)\in\mathbb{Z}^2 : (F|_m[r,s])(\tau,z) := q^{r^2m}y^{2rm}F(\tau,z+r\tau+s).$$

Zeigen Sie:

a) $\forall A,\widetilde{A}\in SL_2(\mathbb{Z})$: $(F|_{k,m}A)|_{k,m}\widetilde{A} = F|_{k,m}(A\widetilde{A})$.

b) $\forall r,s,\tilde{r},\tilde{s}\in\mathbb{Z}$: $(F|_m[r,s])|_m[\tilde{r},\tilde{s}] = F|_m[r+\tilde{r},s+\tilde{s}]$.

c) $\forall A\in SL_2(\mathbb{Z})$ und $r,s\in\mathbb{Z}$:

$$(F|_{k,m}A)|_m[(r,s)A] = (F|_m[r,s])|_{k,m}A.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst mit $(\tilde{r},\tilde{s}) := (r,s)A$, dass

$$r^2\frac{a\tau+b}{c\tau+d} + c\frac{(\tilde{r}\tau+\tilde{s})^2}{c\tau+d} = \tilde{r}\tilde{s} - rs + \tilde{r}^2\tau$$

gilt.

d) Falls F die Bedingung c) aus Definition 4.3.5 erfüllt, sowie $F|_{k,m}S = F$, $F|_{k,m}T = F$, $F|_m[1,0] = F$, $F_m[0,1] = F$, dann ist F eine Jacobi-Form vom Gewicht k und Index m, wobei $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

e) Falls F eine Jacobi-Form vom Gewicht k und Index m ist, gilt: $\forall\tau\in\mathfrak{H}, f(\tau) := F(\tau,0)$ ist Modulform vom Gewicht k und Spitzenform, falls F Jacobi-Spitzenform ist.

f) Falls F die Bedingung c) aus Definition 4.3.5 erfüllt, dann gilt: $\forall r,s\in\mathbb{Z}$ ist $f(\tau) := (F|_m[r,s])(\tau,0)$ holomorph in Unendlichen; f verschwindet in Unendlichen, falls F die Bedingung c) für Jacobi-Spitzenformen erfüllt.