Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Mara Ungureanu
Mathematisches Institut
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Funktionentheorie II
WS 2019/20

Übungsblatt 12

Aufgabe 43 (Verallgemeinerung des 4. Liouvilleschen Satzes)**.** Es sei T eine Thetafunktion der Charakteristik $\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}$ bzgl. eines Gitters $\Lambda \subset \mathbb{C}$ wie in Definition 1.1.1 b) mit Basis (ω_1, ω_2) und $T \not\equiv 0$. Zeigen Sie: in $\mathbb{C}/\Lambda$ gilt

$$\sum_{p \in \mathbb{C}/\Lambda} \nu_p(T) \cdot p = \frac{1}{2\pi i}\Big(-\omega_1 b_2 + \omega_2 b_1 - \frac{1}{2}a_2\omega_1^2 + \frac{1}{2}a_1\omega_2^2\Big).$$

Aufgabe 44. Seien $\vartheta_{ab} : \mathfrak{H} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, mit $a, b \in \{0, 1\}$, die Jacobi-Theta-Funktionen aus Definition 4.2.2. Zeigen Sie:

a) Für $k \in \mathbb{N}$ gilt: $(\vartheta_{00}(2\tau, 0))^k = \sum_{N=0}^{\infty} Q_k(N) q^N$, wobei

$$Q_k(N) = \#\{(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{Z}^k \mid n_1^2 + \ldots + n_k^2 = N\}.$$

b) Für alle $\tau \in \mathfrak{H}$ und $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} \vartheta_{00}(\tau, z + \omega_2) &= \vartheta_{00}(\tau, z), & \vartheta_{01}(\tau, z + \omega_2) &= \vartheta_{01}(\tau, z), \\ \vartheta_{10}(\tau, z + \omega_2) &= -\vartheta_{10}(\tau, z), & \vartheta_{11}(\tau, z + \omega_2) &= -\vartheta_{11}(\tau, z). \end{aligned}$$

c) Für alle $\tau \in \mathfrak{H}$ und $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} \vartheta_{10}(\tau, z + \omega_2/2) &= \vartheta_{11}(\tau, z), & \vartheta_{00}(\tau, z + \omega_2/2) &= \vartheta_{01}(\tau, z), \\ \vartheta_{01}(\tau, z + \omega_1/2) &= -iq^{-\frac{1}{8}} y^{-\frac{1}{2}} \vartheta_{11}(\tau, z), & \vartheta_{00}(\tau, z + \omega_1/2) &= q^{-\frac{1}{8}} y^{-\frac{1}{2}} \vartheta_{10}(\tau, z). \end{aligned}$$

d) Für alle $\tau \in \mathfrak{H}$ und $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} \vartheta_{11}(\tau, z)^2 \vartheta_{01}(\tau, 0)^2 + \vartheta_{10}(\tau, z)^2 \vartheta_{00}(\tau, 0)^2 - \vartheta_{00}(\tau, z)^2 \vartheta_{10}(\tau, 0)^2 = 0, \\ \vartheta_{11}(\tau, z)^2 \vartheta_{10}(\tau, 0)^2 + \vartheta_{00}(\tau, z)^2 \vartheta_{01}(\tau, 0)^2 - \vartheta_{01}(\tau, z)^2 \vartheta_{00}(\tau, 0)^2 = 0. \end{aligned}$$

e) Für alle $\tau \in \mathfrak{H}$ und $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} \vartheta_{00}(\tau, -z) &= \vartheta_{00}(\tau, z), & \vartheta_{10}(\tau, -z) &= \vartheta_{10}(\tau, z), \\ \vartheta_{01}(\tau, -z) &= \vartheta_{01}(\tau, z), & \vartheta_{11}(\tau, -z) &= -\vartheta_{11}(\tau, z). \end{aligned}$$