Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Mara Ungureanu
Mathematisches Institut
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Funktionentheorie II
WS 2019/20

Übungsblatt 11

Aufgabe 39. Zeigen Sie für meromorphe Differentialformen ω, $\widetilde{\omega}$ vom Gewicht $m \in \mathbb{N}$ auf einer Riemannschen Fläche X mit $\omega \not\equiv 0$, $\widetilde{\omega} \not\equiv 0$:

a) $\forall x \in X$: $\nu_x(\omega)$ ist unabhängig von der Koordinatenwahl.

b) $\deg \omega = \deg \widetilde{\omega}$.

Aufgabe 40. Konstruieren Sie eine meromorphe Differentialform ω vom Gewicht $m \in \mathbb{N}$ auf $\mathbb{CP}^1$. Folgern Sie direkt, dass $\deg(\omega) = -2m$.
Hinweis: Nutzen Sie die affinen Standardkoordinatenumgebungen U_0 und U_1 und die entsprechenden Koordinaten $z = \frac{z^1}{z^0}$ und $u = \frac{z^0}{z^1} = \frac{1}{z}$.

Aufgabe 41. a) Seien X und Y Riemannsche Flächen und $\pi : X \to Y$ holomorph sowie $\omega \not\equiv 0$ eine Differentialform vom Gewicht $m \in \mathbb{N}$ auf Y. Bzgl. lokaler Koordinaten y auf Y sei ω durch $f(dy)^{\otimes m}$ gegeben. Zeigen Sie: Es existiert eine meromorphe Differentialform $\pi^*\omega$ auf X, die bzgl. lokaler holomorpher Koordinaten z auf X durch $(f \circ \pi) \cdot (\pi')^m (dz)^{\otimes m}$ gegeben ist, wobei $\pi' = \frac{\partial \widetilde{\pi}}{\partial z}$, $\widetilde{\pi} = y \circ \pi$.

b) Sei $\pi : X \to Y$ nun eine r-blättrige verzweigte Überlagerung Riemannscher Flächen und $\omega \not\equiv 0$ eine meromorphe Differentialform vom Gewicht $m \in \mathbb{N}$ auf Y. Zeigen Sie:

$$\deg(\pi^*\omega) = r \deg \omega + m \sum_{x \in X} (n_x - 1).$$

Aufgabe 42. Sei $\sigma_m(n) = \sum_{d|n} d^m$ die Teilersumme vom Grad m, wobei $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

a) $\sigma_7(m) = \sigma_3(m) + 120 \sum_{k=1}^{m-1} \sigma_3(k)\sigma_3(m-k)$,

b) $\sigma_{13}(m) = 11\sigma_9(m) - 10\sigma_3(m) + 2640 \sum_{k=1}^{m-1} \sigma_3(k)\sigma_9(m-k)$.

Hinweis: Nutzen Sie Gleichungen für normierte Eisensteinreihen wie in Aufgabe 32 a), Teil i).