Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Mara Ungureanu
Mathematisches Institut
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Funktionentheorie II
WS 2019/20

Übungsblatt 10

Aufgabe 35. Seien X eine Riemannsche Fläche, $\{(U_a, z_a) \mid a \in A\}$ ein holomorpher Atlas auf X, und ω eine meromorphe Differentialform mit $\omega|_{U_a} = f_a dz_a \ \forall a \in A$. Sei $\widetilde{f_a} : z_a(U_a) \to \mathbb{C}$ die Funktion, die durch $f_a = \widetilde{f_a} \circ z_a$ gegeben ist. Zeigen Sie:

a) Die Ordnung $\nu_z(\omega)$ von ω in $z \in X$ ist unabhängig von der Koordinatenwahl.

b) Falls $z \in U_a$, $\zeta = z_a(z)$ dann gilt $res_z(\omega) = res_\zeta(\widetilde{f_a})$.

Aufgabe 36. Sei $\mathring{D}$ das Innere des Fundamentalbereichs $D \subset \mathfrak{H}$ von $PSL_2(\mathbb{Z})$.

a) Zeigen Sie: $j(\tau)d\tau$ ist auf $\mathring{D}$ wohldefiniert und induziert eine meromorphe Differentialform ω auf $\{[\tau] \in {}_{PSL_2(\mathbb{Z})}\backslash^{\mathfrak{H}} \mid \tau \in \mathring{D}\}$.

b) Bestimmen Sie eine maximale offene Menge in ${}_{PSL_2(\mathbb{Z})}\backslash^{\mathfrak{H}} \cup \{i\infty\}$, auf der die meromorphe Differentialform ω aus a) meromorph fortgesetzt werden kann.

Aufgabe 37. Seien X und Y Riemannsche Flächen und $\pi : X \to Y$ holomorph sowie $\omega \not\equiv 0$. Bzgl. lokaler Koordinaten y auf Y sei ω durch fdy gegeben. Zeigen Sie: Es existiert eine meromorphe Differentialform $\pi^*\omega$ auf X, die bzgl. lokaler holomorpher Koordinaten z auf X durch $(f \circ \pi) \cdot \pi' dz$ gegeben ist, wobei $\pi' = \frac{\partial \widetilde{\pi}}{\partial z}$, $\widetilde{\pi} = y \circ \pi$.

Aufgabe 38. *Definition:* Sei ω eine meromorphe Differentialform auf einer Riemannschen Fläche X und $\omega \not\equiv 0$. Der *Divisor von ω auf X* ist durch

$$(\omega) = \sum_{p \in X} \nu_p(\omega) p$$

gegeben, wobei eine formale Summe von Punkten auf X gemeint ist. Sei $\pi : X' \to X$ eine holomorphe Abbildung Riemannscher Fläche. Dann heißt

$$\pi^*(\omega) := \sum_{q \in \pi^{-1}(p), p \in X} \nu_p(\omega) q$$

der *π-zurückgezogene Divisor von ω auf X'*.

Zeigen Sie:

a) Falls π eine r-blättrige verzweigte Überlagerung ist, dann gilt

$$(\pi^*\omega) = \pi^*(\omega) + \sum_{q \in X'} (n_q - 1) q.$$

b) Falls π ein Isomorphismus ist, dann gilt $\deg(\omega) = \deg(\pi^*\omega)$.