Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Mara Ungureanu
Mathematisches Institut
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Funktionentheorie II
WS 2019/20

Übungsblatt 1

In folgenden sei $\mathfrak{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid Im(\tau) > 0\}$ die obere Halbebene. Für $\tau \in \mathfrak{H}$, $z \in \mathbb{C}$ und $\alpha \in \mathbb{Q}$, seien $q^\alpha = \exp(2\pi i \alpha \tau)$ und $y^\alpha = \exp(2\pi \alpha i z)$. Für $\tau \in \mathfrak{H}$ sei

$$\Lambda_\tau = \{m\tau + n \mid m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Aufgabe 1. Seien $\eta : \mathfrak{H} \to \mathbb{C}$, $\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$ die Dedekind η-Funktion und $\vartheta_1 : \mathfrak{H} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\vartheta_1(\tau, z) = iq^{\frac{1}{8}} y^{-\frac{1}{2}} \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1-q^{n-1}y)(1-q^n y^{-1})$ die 1. Jacobi ϑ-Funktion. Zeigen Sie:

a) η und ϑ_1 sind holomorph in τ, und ϑ_1 ist auch holomorph in z.

b) Für alle $\tau \in \mathfrak{H}$ gilt: $\eta(\tau) \neq 0$.

c) Für alle $z \in \Lambda_\tau$ gilt: $\vartheta_1(\tau, z) = 0$.

d) Es gilt:
$$\frac{\vartheta_1(\tau, z)}{\eta(\tau)} = iq^{\frac{1}{12}}(y^{-\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}) \sum_{N,M} (-1)^M Q_M(N) q^N y^M,$$
wobei $M \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}$, und $Q_M(N)$ die Mächtigkeit der folgenden Menge ist:
$$\Big\{((k_1, \ldots, k_A), (l_1, \ldots, l_B)) \in \mathbb{N}^A \times \mathbb{N}^B \mid A, B \in \mathbb{N}, 0 < k_1 < \ldots < k_A, 0 < l_1 < \ldots < l_B,$$
$$\sum_{i=1}^{A} k_i + \sum_{j=1}^{B} l_j = N, A - B = M\Big\}.$$

Aufgabe 2. Sei $\Lambda = \{n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$ das von einer Basis (ω_1, ω_2) von $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$ mit $Im(\omega_1/\omega_2) > 0$ erzeugte Gitter.

a) Zeigen Sie: $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \simeq (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

b) Sei $N \in \mathbb{N}$. Wieviele Elemente der Ordnung N gibt es in $\mathbb{C}/\Lambda$?

c) Zeigen Sie: Für jedes Gitter $\Lambda \subset \mathbb{R}^m$ vom Rang m, $\mathbb{R}^m/\Lambda \simeq \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{m \text{ mal}}$ als topologische Mannigfaltigkeiten, unabhängig von Λ.

Aufgabe 3. Seien $\Lambda, \Lambda' \subset \mathbb{C}$ zwei Gitter wie in Aufgabe 2.

a) Sei $f : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ eine bzgl. Λ elliptische Funktion. Zeigen Sie: f' is auch eine bzgl. Λ elliptische Funktion.

b) Zeigen Sie: Die bzgl. Λ elliptische Funktionen bilden einen Körper.

c) Sei $\varphi : \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{C}/\Lambda'$ eine holomorphe Abbildung mit der folgenden Eigenschaft: es existieren zwei komplexe Zahlen m und b, so dass $m\Lambda \subset \Lambda'$ und $\varphi(z+\Lambda) = mz + b + \Lambda'$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

   i) Die Abbildung φ ist ein Gruppenhomomorphismus.

   ii) $b \in \Lambda'$.

   iii) $\varphi(0+\Lambda) = 0 + \Lambda'$.