Prof. Dr. Katrin Wendland
Mara Ungureanu
Mathematisches Institut
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Differentialgeometrie I
WS 2018/19
13. Dezember, 2018

Übungsblatt 9

Abgabe: 20. Dezember, 2018, 12:00 Uhr

Aufgabe 32 (Parallelverschiebung auf dem Kegel)**.**

a) (1 Punkt) Für $\beta \in [0, 2\pi]$ bezeichne R_β die Drehung auf $\mathbb{R}^2$ um 0 um den Winkel β. Betrachten Sie die folgende Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^2$:

$$v \sim v' \Leftrightarrow v' = R_\beta(v).$$

Seien $\mathcal{K}_\beta := \mathbb{R}^2/\sim$ der Quotientenraum mit der von der Standardmetrik auf $\mathbb{R}^2$ induzierten Metrik und $q : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{K}_\beta$ die kanonische Abbildung (vgl. Aufgabe 15). Sei nun

$$\gamma_u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \psi \mapsto (u\cos\psi, u\sin\psi),$$

d. h. $(\gamma_u)_{|[0,\beta]}$ ist der Kreisbogen in $\mathbb{R}^2$ mit Mittelpunktswinkel β und Radius $u \in (0, \infty)$. Betrachten Sie einen Tangentialvektor $w \in T_{q(\gamma_u(0))}\mathcal{K}_\beta$ und seine Parallelverschiebung $w' := P^{q(\gamma_u(\beta))}_{q(\gamma_u(0))}(q(\gamma_u))(v)$ entlang $q(\gamma_u)$. Berechnen Sie den Winkel zwischen w und w'.
Hinweis: Man darf annehmen, dass $\mathcal{K}_\beta$ eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit ist.

Seien $\alpha \in (0, \pi)$ und $\widetilde{\mathcal{K}}_\alpha$ die Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ die durch

$$(u, \theta) \mapsto (u\sin\alpha\cos\theta, u\sin\alpha\sin\theta, u\cos\alpha), \quad u \in (0, +\infty) \text{ und } \theta \in \mathbb{R}$$

parametrisiert ist.

b) (1 Punkt) Berechnen Sie die von der Standardmetrik auf $\mathbb{R}^3$ induzierte Metrik g_α auf $\widetilde{\mathcal{K}}_\alpha$ in Koordinaten (u, θ) mit $\theta \in (\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi)$ für beliebige $\theta_0 \in \mathbb{R}$.

c) (2 Punkte) Seien $u \in \mathbb{R}$ und $\widetilde{\gamma}_u$ die Kurve $\widetilde{\gamma}_u : \mathbb{R} \to \widetilde{\mathcal{K}}_\alpha$ auf $\widetilde{\mathcal{K}}_\alpha$ mit

$$\widetilde{\gamma}_u(\theta) = (u\sin\alpha\cos\theta, u\sin\alpha\sin\theta, u\cos\alpha).$$

Betrachten Sie einen Tangentialvektor $\widetilde{w} \in T_{\widetilde{\gamma}_u(0)}\widetilde{\mathcal{K}}_\alpha$ und seine Parallelverschiebung $\widetilde{w}' := P^{\widetilde{\gamma}_u(2\pi)}_{\widetilde{\gamma}_u(0)}(\widetilde{\gamma}_u)(v)$ entlang $\widetilde{\gamma}_u$. Berechnen Sie den Winkel zwischen $\widetilde{w}$ und $\widetilde{w}'$ und vergleichen Sie die Antwort mit der von Teil a).

Aufgabe 33 (Parallelverschiebung und Geodätische)**.**

a) (2 Punkte) Seien $\gamma : I \to M$ eine stückweise glatte Kurve in einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit M und $t_0, t_1 \in I$ mit $p := \gamma(t_0)$ und $q := \gamma(t_1)$. Betrachten Sie die entsprechende Parallelverschiebung

$$P^q_p(\gamma) : T_pM \to T_qM$$

entlang γ von p nach q. Sei $\widetilde{\gamma}$ eine Reparametrisierung von γ (siehe Aufgabe 27c)). Zeigen Sie: $P^q_p(\gamma) = P^q_p(\widetilde{\gamma})$.

b) (2 Punkte) Seien M und N semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten, $\gamma : I \to M$ eine Geodätische, und $F : M \to N$ eine glatte Abbildung, so dass für alle $p \in M$ das Differential DF_p eine Isometrie ist, d. h.

$$\forall v, w \in T_pM \colon \langle v, w \rangle = \langle DF_p(v), DF_p(w) \rangle.$$

Zeigen Sie: $F \circ \gamma$ ist eine Geodätische auf N.

Aufgabe 34 (Geodätische)**.**

a) (2 Punkte) Zeigen Sie: Auf $\mathbb{R}^n$ mit der Standardmetrik sind die Geodätischen genau die mit konstanter Geschwindigkeit parametrisierten Geradenstücke.

b) (2 Punkte) Sei $\mathbb{S}^2$ die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^3$. Seien auch $p \in \mathbb{S}^2$ und $u \in T_p\mathbb{S}^2$, die man als Vektoren in $\mathbb{R}^3$ interpretiert. Dann heißt *Großkreis* der Durchschnitt von $\mathbb{S}^2$ mit der Ebene in $\mathbb{R}^3$, die 0, p und u enthält.

Zeigen Sie: Auf $\mathbb{S}^2$ sind die nicht konstanten Geodätischen mit maximalem Definitionsbereich genau die Großkreise, die mit konstanter Geschwindigkeit parametrisiert sind. *Hinweis*: Betrachten Sie die Parametrisierung

$$c(t) = \cos t \cdot p + \sin t \cdot u, \; c(0) = p, \; \dot{c}(0) = u$$

eines Großkreises.

Aufgabe 35 (Exponentialabbildung)**.**

a) (1 Punkt) Berechnen Sie die Exponentialabbildung auf dem n-dimensionalen Euklidischen Raum $(\mathbb{R}^n, g)$, d.h. in der Notation von Aufgabe 25 mit $g = \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i$ bezüglich der Standardbasis in $\mathbb{R}^n$.

b) (1 Punkt) Sei $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ der Einheitskreis mit der vom Euklidischen Raum $(\mathbb{R}^2, g)$ induzierten Metrik. Berechnen Sie diese Metrik in Polarkoordinaten. Darüber hinaus sei $p = (\sin\theta, \cos\theta) \in \mathbb{S}^1$. Benutzen Sie den Isomorphismus $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}, p \mapsto e^{i\theta}$ für $p \in \mathbb{S}^1$ wie oben, um die Exponentialabbildung $\exp_p\left(t \frac{\partial}{\partial\theta}\Big|_p\right)$ zu berechnen.

c) (2 Punkte) Sei $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ die Einheitssphäre mit der vom Euklidischen Raum $(\mathbb{R}^3, g)$ induzierten Metrik. Nutzen Sie das Ergebnis von Aufgabe 34, um die Exponentialabbildung auf $\mathbb{S}^2$ zu bestimmen. Berechnen Sie $\exp_p(u)$, wobei $\|u\| = \pi$, und folgern Sie, dass die Exponentialabbildung auf $T_p\mathbb{S}^2$ kein Diffeomorphismus ist.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.