Prof. Dr. Katrin Wendland
Mara Ungureanu
Mathematisches Institut
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Differentialgeometrie I
WS 2018/19
6. Dezember, 2018

Übungsblatt 8

Abgabe: 13. Dezember, 2018, 12:00 Uhr

Aufgabe 28 (Zusammenhänge)**.** Seien M eine glatte Mannigfaltigkeit und D ein Zusammenhang auf M.

a) (2 Punkte) Betrachten Sie einen Punkt $p \in M$ und zwei Vektorfelder W_1, $W_2 \in \mathcal{X}(M)$, so dass $W_1 = W_2$ in einer Umgebung U von p. Zeigen Sie:

$$\forall V \in \mathcal{X}(M)\colon\, (D_V W_1)_p = (D_V W_2)_p.$$

Hinweis: Nutzen Sie eine Funktion $f \in \mathcal{F}(M)$ mit $\operatorname{supp}(f) \subset U$, und so dass $f \equiv 1$ in einer offenen Umgebung $U' \subset U$ von p. Betrachten Sie $D_V(fW_1)$ und $D_V(fW_2)$ auf M.

b) (2 Punkte) Sei nun $U \subset M$ eine offene Menge und $p \in U$. Betrachten Sie Vektorfelder $V, W, \widetilde{V}, \widetilde{W} \in \mathcal{X}(M)$ mit $V_p = \widetilde{V}_p$ und $W|_U = \widetilde{W}|_U$. Nutzen Sie Teil a) um zu zeigen, dass $(D_V W)_p = (D_{\widetilde{V}} \widetilde{W})_p$.

Aufgabe 29 (Levi-Civita Zusammenhänge auf Untermannigfaltigkeiten)**.** Seien (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita-Zusammenhang ∇, und $P \subset M$ eine semi-Riemannsche Untermannigfaltigkeit.

a) (2 Punkte) Beweisen Sie: $\forall p \in M$ liefert $T_pM = T_pP \oplus (T_pP)^\perp$ eine Zerlegung

$$X_p = X_p^{\tan} + X_p^\perp$$

für alle $X \in \mathcal{X}(M)$.

b) (2 Punkte) Für alle $V, W \in \mathcal{X}(P)$ definieren wir $\overline{\nabla}_V W := (\nabla_{\widetilde{V}} \widetilde{W})^{\tan}$, wobei $\widetilde{V}$, $\widetilde{W}$ beliebige Fortsetzungen von V, W zu glatten Vektorfeldern auf M sind. Zeigen Sie: $\overline{\nabla}$ ist der Levi-Civita-Zusammenhang auf P.

Aufgabe 30 (F-verwandte Vektorfelder und glatte Kurven)**.** Sei $F : M \to N$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten.

a) (2 Punkte) Betrachten Sie Vektorfelder X, $X' \in \mathcal{X}(M)$ und Y, $Y' \in \mathcal{X}(N)$, so dass

$$X \stackrel{F}{\sim} Y \text{ und } X' \stackrel{F}{\sim} Y'.$$

Zeigen Sie: $[X, X'] \stackrel{F}{\sim} [Y, Y']$.

b) (2 Punkte) Sei $X \in \mathcal{X}(M)$ ein Vektorfeld und $\gamma : I \to M$ eine glatte Kurve, so dass

$$\forall t \in I\colon\, \dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)}.$$

Wir nennen eine solche Kurve γ eine *Integralkurve von X*. Betrachten Sie ein Vektorfeld $Y \in \mathcal{X}(N)$, so dass $X \stackrel{F}{\sim} Y$. Zeigen Sie: die Kurve $F \circ \gamma$ ist eine Integralkurve von Y.

Aufgabe 31 (Christoffel-Symbole und Vektorfelder entlang Kurven).

a) (1 Punkt) Sei $(\mathbb{R}^3, g)$ der 3-dimensionale Euklidische Raum mit dem natürlichen Zusammenhang D. Sei (U, ξ) die Karte auf $\mathbb{R}^3$, die durch

$$\xi : U \to (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (-\infty, \infty), \quad \xi^{-1}(r, \theta, z) := (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$$

(Zylinderkoordinaten) definiert ist. Berechnen Sie die Christoffel-Symbole bezüglich der Karte (U, ξ).

b) (1 Punkt) Seien (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, $\gamma : I \to M$ eine Kurve in M, und $\xi = (x^1, \ldots, x^n)$, $\eta = (y^1, \ldots, y^n)$ zwei lokale Koordinatensysteme um $\gamma(t)$, wobei $t \in I$. Zeigen Sie:

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}: \ \sum_k \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y^k}{\partial x^i}(\gamma(t))\right)\frac{\partial x^j}{\partial y^k}(\gamma(t)) = 0.$$

c) (2 Punkte) Seien (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, $\gamma : I \to M$ eine Kurve in M, und $Z \in \mathcal{X}(\gamma)$. Bezüglich beliebiger lokaler Koordinaten $(U, \xi = (x^1, \ldots, x^n))$ schreiben wir für $t \in I$ mit $\gamma(t) \in U$

$$Z(t) = \sum_i Z^i(t)\, \partial_i|_{\gamma(t)}.$$

Zeigen Sie: Es existiert ein Vektorfeld $Z' \in \mathcal{X}(\gamma)$ mit

$$Z'(t) = \sum_k \left(\frac{dZ^k}{dt}(t) + \sum_{i,j} Z^i(t)\frac{d(x^j \circ \gamma)}{dt}(t)\, \Gamma^k_{ji}(\gamma(t))\right)\partial_k|_{\gamma(t)} \qquad (*)$$

bezüglich beliebiger lokaler Koordinaten (U, ξ). D. h. die lokalen Ausdrücke $(*)$ können konsistent verklebt werden.

Hinweis: Betrachten Sie zwei lokale Koordinatensysteme $\xi = (x^1, \ldots, x^n)$ und $\eta = (y^1, \ldots, y^n)$ um $\gamma(t)$, die entsprechenden lokalen Ausdrücke

$$Z = \sum_i Z^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_j \widetilde{Z}^j \frac{\partial}{\partial y^j},$$

und die Koordinatentransformation

$$\widetilde{Z}^k(t) = \sum_a \frac{\partial y^k}{\partial x^a}(\gamma(t)) Z^a(t).$$

Berechnen Sie $Z'(t)$ bezüglich η und vergleichen Sie mit $(*)$.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.