Prof. Dr. Katrin Wendland
Mara Ungureanu
Mathematisches Institut
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Differentialgeometrie I
WS 2018/19
29. November, 2018

Übungsblatt 7

Abgabe: 6. Dezember, 2018, 12:00 Uhr

Aufgabe 24 (Indefinite Metriken)**.** Seien V ein reeller n-dimensionaler Vektorraum und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ eine nicht-degenerierte symmetrische Bilinearform vom Index r auf V. Zeigen Sie:

a) (1 Punkt) Die Bilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle$ liefert einen Isomorphismus $V \to V^*$, der durch

$$v \mapsto \alpha_v,\ \alpha_v(w) = \langle v, w\rangle$$

definiert ist.

b) (2 Punkte) Die Bilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle$ liefert eine semi-Riemannsche Metrik g auf V. Außerdem gibt es eine globale Karte $\xi = (x^1, \dots, x^n) : V \to \mathbb{R}^n$, so dass $g = \sum_{i=1}^n \epsilon_i\, dx^i \otimes dx^i$, wobei

$$\epsilon_i = \begin{cases} -1 & \text{falls } 1 \leq i \leq r \\ 1 & \text{falls } r+1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

c) (1 Punkt) Die Abbildung $\nabla : \mathcal{X}(V) \times \mathcal{X}(V) \to \mathcal{X}(V)$, die durch

$$(\nabla_X Y)(p) := DY_p(X_p)$$

definiert ist, liefert einen torsionsfreien Zusammenhang auf V.
Hinweis: Mithilfe der natürlichen Identifikation $T_pV \simeq V$ für alle $p \in V$ können Sie $X, Y \in \mathcal{X}(V)$ auffassen als glatte Abbildungen $X, Y\colon V \to V$.

Aufgabe 25 (Die Euklidische Metrik in Polarkoordinaten)**.** Sei $(\mathbb{R}^2, g)$ der 2-dimensionale Euklidische Raum, d. h. in der Notation von Aufgabe 24:

$$V = \mathbb{R}^2,\ \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{2} x^i y^i,\ g = \sum_{i=1}^{2} dx^i \otimes dx^i,$$

bezüglich der Standardbasis in $\mathbb{R}^2$.

a) (1 Punkt) Seien $X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^2)$ wobei $Y = f_1\,\partial_1 + f_2\,\partial_2$. Zeigen Sie: der natürliche Zusammenhang $\nabla^0_X Y = X(f_1)\,\partial_1 + X(f_2)\,\partial_2$ auf $\mathbb{R}^2$ ist Levi-Civita.

Sei (U, ξ) die Karte auf $\mathbb{R}^2$, die durch

$$\xi : U \to (0, +\infty) \times (0, 2\pi),\ \xi^{-1}(r, \theta) := (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

(Polarkoordinaten) definiert ist.

b) (1 Punkt) Berechnen Sie die Koeffizienten von g bezüglich der Koordinaten (U, ξ).

c) (2 Punkte) Sei ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang zur Metrik g. Berechnen Sie:

$$\nabla_{\partial_r}\partial_r,\ \nabla_{\partial_r}\partial_\theta,\ \nabla_{\partial_\theta}\partial_r,\ \nabla_{\partial_\theta}\partial_\theta.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Eigenschaften des Levi-Civita-Zusammenhanges, um die Berechnungen zu vereinfachen.

Aufgabe 26 (Lie Klammern)**.**

a) (2 Punkte) Seien M eine glatte Mannigfaltigkeit und $(U, \xi = (x^1, \dots, x^n))$ eine Karte auf M. Berechnen Sie den Ausdruck der Lie-Klammer $[X, Y]$ bezüglich der Koordinaten (U, ξ) wobei $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

b) (2 Punkte) Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $F : M \to N$ eine glatte Abbildung. Zeigen Sie, dass $[DF(X), DF(Y)] = DF([X, Y])$ für alle $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

Aufgabe 27 (Länge von glatten Kurven)**.** *Definition:* Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wir definieren die *Länge* eines Tangentialvektors $X \in T_pM$ durch

$$|X|_g := \sqrt{g_p(X, X)}.$$

Betrachten Sie nun eine glatte Kurve $\gamma : [a, b] \to M$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Wir definieren die Länge $L_g(\gamma)$ der Kurve γ durch

$$L_g(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|_g \, dt.$$

a) (2 Punkte) Zeigen Sie: Falls $a < c < b$, dann gilt

$$L_g(\gamma) = L_g(\gamma|_{[a,c]}) + L_g(\gamma|_{[c,b]}).$$

b) (2 Punkte) Sei $\widetilde{\gamma}$ eine Reparametrisierung von γ, d. h. es gibt einen Diffeomorphismus $f : [c, d] \to [a, b]$, wobei $c, d \in \mathbb{R}$ mit $c < d$, so dass $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ f$. Zeigen Sie, dass $L_g(\widetilde{\gamma}) = L_g(\gamma)$.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.