Prof. Dr. Katrin Wendland
Mara Ungureanu
Mathematisches Institut
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Differentialgeometrie I
WS 2018/19
22. November, 2018

# Übungsblatt 6

Abgabe: 29. November, 2018, 12:00 Uhr

**Aufgabe 21** (Konstruktion eines Vektorbündels aus Übergangsfunktionen)**.** Seien $M$ eine glatte Mannigfaltigkeit und $\pi : E \to M$ ein glattes Vektorbündel vom Rang $k$. Betrachten Sie glatte Atlanten

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \{\widetilde{\xi}_i : \widetilde{U}_i \to \widetilde{\xi}_i(\widetilde{U}_i) \mid i \in I\} \text{ und } \mathcal{A} = \{\xi_i : U_i \to \xi_i(U_i) \mid i \in I\}$$

auf $E$ und $M$ so dass die Abbildungen $\varphi_i : U_i \times \mathbb{R}^k \to \widetilde{U}_i$, $(p, v) \mapsto \widetilde{\xi}_i^{-1}(\xi_i(p), v)$ lokale Trivialisierungen sind, und $\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j(p, v) = (p, \tau_{ij}(p)v)$ für alle $i, j \in I$, $p \in U_i \cap U_j$, und $v \in \mathbb{R}^k$. Zeigen Sie:

a) (1 Punkt) Für $i, j \in I$: $\forall q \in U_i \cap U_j$, liefern die entsprechenden lokalen Trivialisierungen $\varphi_i$ und $\varphi_j$ glatte Übergangsfunktionen $\tau_{ij} : U_i \cap U_j \to GL_k(\mathbb{R})$.

b) (1 Punkt) Sei $E_k$ die Einheitsmatrix in $GL_k(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass die Übergansfunktionen die folgenden Bedingungen für alle $i, j, l \in I$ erfüllen:

   i) $\tau_{ii}(q) = E_k$ für alle $q \in U_i$,
   ii) $(\tau_{ij} \circ \tau_{ji})(q) = E_k$ für alle $q \in U_i \cap U_j$,
   iii) $(\tau_{ij} \circ \tau_{jl} \circ \tau_{li})(q) = E_k$ für alle $q \in U_i \cap U_j \cap U_l$,

   Zeigen Sie darüber hinaus, dass iii) äquivalent zu $(\tau_{ij} \circ \tau_{lj}^{-1} \circ \tau_{li})(q) = E_k$ ist.

Betrachten Sie jetzt eine Menge glatter Abbildungen $\{\tau'_{ij} : U_i \cap U_j \to GL(k, \mathbb{R})\}_{i,j \in I}$, die die Bedingungen i), ii), iii) für alle $i, j, l \in I$ erfüllen. Betrachten Sie den Quotientenraum

$$E' = \Big(\bigsqcup_{i \in I} (i \times U_i \times \mathbb{R}^k)\Big) / \sim,$$

wobei $(i, q, v) \sim (j, q, \tau'_{ij}(q)v)$ $\forall i, j \in I,\ q \in U_i \cap U_j,\ v \in \mathbb{R}^k$.

c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

d) (3 Punkte) Betrachten Sie die Abbildung $\pi' : E' \to M$, die durch $[(i, q, v)] \mapsto q$ gegeben ist. Versehen Sie $E'$ mit der Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit und zeigen Sie, dass $\pi' : E' \to M$ ein glattes Vektorbündel ist.

e) (2 Punkte) Nehmen Sie jetzt an, dass $\tau_{ij} = \tau'_{ij}$ für alle $i, j \in I$. Betrachten Sie die Abbildung

$$\widetilde{f} : E \to E',\ \widetilde{f}(w) = [i, \varphi_i^{-1}(w)] \text{ falls } \pi(w) \in U_i.$$

   Zeigen Sie:

1) Die Abbildung $\widetilde{f}$ ist wohldefiniert (d. h. unabhängig von $i$) und glatt.

2) $\pi' \circ \widetilde{f} = \pi$.

3) Die Einschränkung $\widetilde{f}|_{\pi^{-1}(q)} : \pi^{-1}(q) \to \pi'^{-1}(q)$ ist ein linearer Isomorphismus.

**Aufgabe 22** (Tensoren und Tensorfelder)**.**

a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\dim V \otimes W = \dim V \cdot \dim W$, wobei $V$ und $W$ endlich dimensionale Vektorräume über $\mathbb{R}$ sind.

b) (1 Punkt) Zeigen Sie: $\{\text{Tensoren vom Typ } (1,1) \text{ auf } \mathbb{R}^n\} \simeq \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$.
*Hinweis:* Betrachten Sie die Standardbasis $(e_1, \dots, e_n)$ und ihre Dualbasis $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ und konstruieren Sie einen Isomorphismus $\mathbb{R}^n \otimes (\mathbb{R}^n)^* \to \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$, $e_i \otimes e_j^* \mapsto E_{ji}$.

c) (2 Punkte) Sei $M$ eine glatte Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie: Als $\mathcal{F}(M)$-Moduln gilt

$$\mathcal{T}_2^1(M) \simeq \{A : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M) \mid A \text{ ist } \mathcal{F}(M)\text{-bilinear}\}.$$

**Aufgabe 23** (Tensorfelder)**.** Sei $M$ eine glatte Mannigfaltigkeit.

a) (1 Punkt) Seien $E$ und $F$ zwei glatte Vektorbündel über $M$. Beweisen Sie, dass der Raum $E \otimes F$, der durch $E \otimes F := \bigsqcup_{p \in M} E_p \otimes F_p$ definiert ist, ein Vektorbündel über $M$ liefert.

b) (1 Punkt) Betrachten Sie nun das Vektorbündel $T_s^r(M)$, das durch

$$T_s^r(M) := (TM)^{\otimes r} \otimes (T^*M)^{\otimes s}$$

definiert ist. Man nennt es das *Vektorbündel der* $(p,q)$*-Tensoren von* $M$. Zeigen Sie, dass

$$\Gamma(M, T_s^r(M)) \simeq \mathcal{T}_s^r(M),$$

wobei $\Gamma(M, E)$ den Raum der glatten Schnitte eines Vektorbündels $E$ über $M$ bezeichnet.
*Hinweis:* Benutzen Sie den Isomorphismus

$$V^{\otimes r} \otimes (V^*)^{\otimes s} \simeq \{L : (V^*)^{\times r} \times V^{\times s} \to \mathbb{R} \mid L \text{ multilinear}\}$$

mit $V = T_pM$ für $p \in M$.

c) (1 Punkt) Betrachten Sie die Lie-Klammer $[\cdot,\cdot] : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$, die durch

$$[X, Y](f) := X(Y(f)) - Y(X(f)) \; \forall X, Y \in \mathcal{X}(M), \; f \in \mathcal{F}(M)$$

definiert ist. Zeigen Sie, dass sie kein Tensorfeld ist.
*Hinweis:* Man darf annehemn, dass $[X, Y] \in \mathcal{X}(M)$.

d) (1 Punkt) Zeigen Sie mithilfe der Transformationsregeln für Tensoren, dass ein $(1,1)$-Tensorfeld $A$ auf $M$ existiert, so dass bezüglich jeder Karte $(U, \xi)$ mit $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ gilt:

$$A|_U = \sum_j \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes dx^j.$$

*Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.*