Prof. Dr. Katrin Wendland
Mara Ungureanu
Mathematisches Institut
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Differentialgeometrie I
WS 2018/19
15. November, 2018

Übungsblatt 5

Abgabe: 22. November, 2018, 12:00 Uhr

Aufgabe 17 (Pullback einer 1-Form).
Definition: Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten, $F : M \to N$ eine glatte Abbildung, und ω eine glatte 1-Form auf N. Die 1-Form $F^*\omega$ auf M, die durch

$$\forall p \in M,\ \forall X \in T_pM:\ (F^*\omega)_p(X) := \omega_{F(p)}(DF_p(X))$$

definiert ist, heißt der *Pullback von ω*.

Seien $\mathbb{S}^3$ die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^4$, $j : \mathbb{S}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ die Inklusionsabbilding, und (x^1, x^2, x^3, x^4) bezeichne die Standardkoordinaten auf $\mathbb{R}^4$.

a) (2 Punkte) Zeigen Sie: $j^*\omega \equiv 0$ genau dann, wenn für alle $x \in \mathbb{S}^3$:

$$\omega_x = \lambda(x^1\, dx^1 + x^2\, dx^2 + x^3\, dx^3 + x^4\, dx^4),$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Betrachten Sie den Isomorphismus $T_x\mathbb{R}^4 \simeq (T_x\mathbb{R}^4)^*$, der mittels des Euklidischen Skalarproduktes gegeben ist.

b) (2 Punkte) Betrachten Sie die 1-Form $\omega_x = x^1\, dx^2 - x^2\, dx^1 + x^3\, dx^4 - x^4\, dx^3$ auf $\mathbb{R}^4$. Zeigen Sie, dass $j^*\omega$ nirgendwo auf $\mathbb{S}^3$ verschwindet.

Aufgabe 18 (Untermannigfaltigkeiten).

a) (2 Punkte) Seien M und P glatte Mannigfaltigkeiten der Dimension m und n, und $F : P \to M$ eine Immersion. Zeigen Sie: falls $F : P \to F(P)$ ein Homöomorphismus ist, dann ist $F(P)$ eine Untermannigfaltigkeit von M.

b) (2 Punkte) Seien $F : M \to N$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten und $Z \subset M$ eine glatte Untermannigfaltigkeit. Zeigen Sie: $F^{-1}(Z) \subset M$ ist eine Untermannigfaltigkeit von M falls F transversal zu Z ist.

Hinweis: Für ein Punkt $p \in F^{-1}(Z)$ betrachten Sie geeignete Karten (U, ξ) um p und (V, η) um $F(p)$ so dass $\eta(F(p)) = 0$ und $\eta(V \cap Z) \subset \mathbb{R}^{\dim Z} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{\dim N}$. Finden Sie eine Abbildung $F' : U \to \mathbb{R}^{\dim N - \dim Z}$ so dass $(F')^{-1}(0) = F^{-1}(Z) \cap U$.

Aufgabe 19 (Tangentialräume von Untermannigfaltigkeiten)**.**

a) (2 Punkte) Seien M eine glatte Mannigfaltigkeit und $P \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit von M. Sei $j : P \hookrightarrow M$ die Inklusionsabbildung. Betrachten Sie das Differential $Dj_p : T_pP \to T_pM$ und den Unterraum

$$\{X \in T_pM \mid X(f) = 0 \ \forall f \in \mathcal{F}(M) \text{ mit } f|_P = 0\} \subset T_pM.$$

Zeigen Sie: Für alle $p \in P$ ist die Abbildung

$$Dj_p : T_pP \to \{X \in T_pM \mid X(f) = 0 \ \forall f \in \mathcal{F}(M) \text{ mit } f|_P = 0\}$$

ein Isomorphismus.

b) (2 Punkte) Seien M und M' glatte Mannigfaltigkeiten und $F : M \to M'$ eine glatte Abbildung. Seien $q \in M'$ ein regulärer Wert von F, $P := F^{-1}(q)$ die entsprechende Untermannigfaltigkeit von M, und $j : P \hookrightarrow M$ die Inklusionsabbildung. Zeigen Sie, dass für jedes $p \in P$, das Differential Dj_p einen Isomorphismus

$$T_pP \simeq \ker\left(DF_p : T_pM \to T_{F(p)}M'\right)$$

liefert.

Aufgabe 20 (Lineare Gruppen)**.** Sei $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ der Vektorraum aller $n \times n$ Matrizen mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$, der mit der Standardtopologie auf $\mathbb{R}^{n^2}$ und der Standardstruktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit versehen ist. Sei $E \in M_n(\mathbb{R})$ die Einheitsmatrix.

a) (1 Punkt) Sei $\mathrm{Sym}(n) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A = A^T\}$ die Menge aller symmetrischen Matrizen. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Sym}(n) \subset M_n(\mathbb{R})$ ein Untermannigfaltigkeit der Dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\mathrm{Sym}(n)$ ein Untervektorraum von $M_n(\mathbb{R})$ ist.

b) (1 Punkt) Betrachten Sie die Abbildung

$$\begin{aligned} f : M_n(\mathbb{R}) &\to \mathrm{Sym}(n) \\ A &\mapsto A^T A. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $E \in \mathrm{Sym}(n)$ ein regulärer Wert von f ist.

c) (1 Punkt) Sei $O(n) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^T A = E\}$ die Orthogonale Gruppe. Zeigen Sie, dass $O(n)$ eine $\frac{n(n-1)}{2}$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $M_n(\mathbb{R})$ ist.

d) (1 Punkt) Betrachten Sie den folgenden Untervektorraum von $M_n(\mathbb{R})$:

$$V := \{B \in M_n(\mathbb{R}) \mid B^T + B = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass $T_E O(n)$ mit V identifiziert werden kann.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.