Prof. Dr. Katrin Wendland
Mara Ungureanu
Mathematisches Institut
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Differentialgeometrie I
WS 2018/19
8. November, 2018

Übungsblatt 4

Abgabe: 15. November, 2018, 12:00 Uhr

Aufgabe 13 (Vektorfelder und Vektorbündel)**.**

a) (1 Punkt) Betrachten Sie die folgenden Vektorfelder auf $\mathbb{R}^2$:

$$V = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \text{ und } W = (x^2 + y^2)\frac{\partial}{\partial x}.$$

Berechnen Sie deren Koordinatendarstellung in Polarkoordinaten für $x > 0$.

b) (2 Punkte) Sei $\mathbb{S}^2$ die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass ein Vektorfeld V auf $\mathbb{S}^2$ existiert, so dass V genau in einem Punkt verschwindet.

c) (1 Punkt) Berechnen Sie die Übergangsfunktionen für das Tangentialbündel $T\mathbb{S}^2$ bezüglich der stereographischen Koordinaten, die in Anwesenheitsaufgabe 4 duch die beiden Abbildungen ξ_N und ξ_S definiert wurden.

Aufgabe 14 (Triviale Vektorbündel)**.**
M sei eine glatte Mannigfaltigkeit.

Definition: Ein Vektorbündel $E \to M$ heißt *trivial*, wenn eine Trivialisierung $h : M \times \mathbb{R}^n \to E$ über die ganze Mannigfaltigkeit M existiert.

a) (1 Punkt) Sei $\pi : E \to M$ ein glattes Vektorbündel vom Rang n. Zeigen Sie: E ist trivial genau dann, wenn es n glatte Schnitte $s_1, \ldots, s_n$ hat, so dass die Vektoren $s_1(p), \ldots, s_n(p) \in \pi^{-1}(p)$ für jedes $p \in M$ linear unabhängig sind.

b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass das Kotangentialbündel T^*M trivial ist, genau dann, wenn das Tangentialbündel TM auch trivial ist.

c) (2 Punkte) Sei $\mathbb{S}^1$ der Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass $T\mathbb{S}^1$ ein triviales Vektorbündel vom Rang 1 ist. Bestimmen Sie explizit einen Diffeomorphismus zwischen $T\mathbb{S}^1$ und dem Zylinder $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

Aufgabe 15 (Das Möbius-Bündel)**.**
Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Sei

$$Y := X/\sim = \{[x] \mid x \in X\}$$

der Quotientenraum, wobei

$$[x] = \{x' \in X \mid x' \sim x\}.$$

Sei $q : X \to Y$ die kanonische Abbildung, die durch

$$q(x) := [x]$$

definiert ist. Betrachten Sie $\mathcal{T}_Y := \{U \subset Y \mid q^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X\}$.

a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die Quotiententopologie $\mathcal{T}_Y$ eine Topologie auf Y definiert, so dass die kanonische Abbildung $q : X \to Y$ stetig ist.

b) (3 Punkte) Betrachten Sie $\mathbb{R}^2$ mit der Standardtopologie und die Äquivalenzrelation

$$(x, y) \sim (x + n, (-1)^n y),$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$. Sei $M = \mathbb{R}^2/\sim$ die Menge aller Äquivalenzklassen.

   i) Zeigen Sie, dass M mit der Quotiententopologie eine glatte Mannigfaltigkeit ist.

   ii) Betrachten Sie die Abbildung $\pi : M \to S^1$, die durch

   $$\pi([x, y]) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$$

   definiert ist. Zeigen Sie, dass $\pi : M \to S^1$ ein Vektorbündel vom Rang 1 auf S^1 ist. Wir nennen dieses Vektorbündel das Möbius-Bündel.

   iii) Zeigen Sie, dass das Möbius-Bündel kein triviales Vektorbündel auf S^1 ist.

Aufgabe 16 (Das Differential einer Abbildung)**.**

a) (3 Punkte) Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und seien $f,\ g \in \mathcal{F}(M)$. Zeigen Sie:

   i) $d(fg) = f\,dg + g\,df$.

   ii) $d(f/g) = (g\,df - f\,dg)/g^2$, wobei $g(p) \neq 0$ für alle $p \in M$ vorausgesetzt werde.

   iii) Falls $J \subset \mathbb{R}$ ein Interval ist, so dass $\mathrm{Im}(f) \subset J$, und $h : J \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion ist, dann gilt $d(h \circ f) = (h' \circ f)df$.

   iv) Falls f eine konstante Funktion ist, dann ist $df = 0$.

b) (1 Punkt) Sei $M = \mathbb{R}^2$ und $f(x, y) = x^2 y \cos x$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie df.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.