Übungsblatt 3

Abgabe: 8. November, 2018, 12:00 Uhr

Aufgabe 9 (Glatte Abbildungen und das Differential).

- a) (2 Punkte) Seien M und N zwei glatte endlich dimensionale Mannigfaltigkeiten, wobei M zusammenhängend sei. Sei $F : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung, so dass das Differential

$$DF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$$

für jedes $p \in M$ die Null-Abbildung ist. Zeigen Sie, dass F eine konstante Abbildung ist.

- b) (1 Punkt) Seien M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension m und N eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n , so dass M und N diffeomorph sind, d.h. es existiert eine glatte, bijektive Abbildung $f : M \rightarrow N$, so dass die Umkehrabbildung f^{-1} auch glatt ist. Zeigen Sie, dass $m = n$.

- c) (1 Punkt) Seien $M_1, \dots, M_k$ glatte Mannigfaltigkeiten, und betrachten Sie die Projektionen

$$\pi_j : M_1 \times \dots \times M_k \rightarrow M_j,$$

wobei $j \in \{1, \dots, k\}$. Zeigen Sie, dass für beliebige $p_j \in M_j$ die Abbildung

$$\alpha : T_{(p_1, \dots, p_k)}(M_1 \times \dots \times M_k) \rightarrow T_{p_1} M_1 \oplus \dots \oplus T_{p_k} M_k, \\ X \mapsto (D\pi_1(X), \dots, D\pi_k(X)),$$

ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 10 (Glatte Kurven I). Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $0 \in I$, M eine glatte Mannigfaltigkeit, und $\gamma : I \rightarrow M$ eine glatte Abbildung. Wir nennen γ eine *glatte Kurve* in M .

- a) (1 Punkt) Sei $\xi : U \rightarrow \xi(U)$, $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ eine Karte auf M und t die Koordinate in I . Drücken Sie den Tangentialvektor von γ :

$$\dot{\gamma}(t) := D\gamma_t \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)$$

mithilfe der Koordinatenvektoren $\frac{\partial}{\partial x^i}$ aus.

- b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass für jeden Tangentialvektor $X \in T_p M$ eine glatte Kurve $\gamma : I \rightarrow M$ existiert, so dass $X = \dot{\gamma}(0)$.

c) (2 Punkte) Zeigen Sie für glatte Kurven $\gamma, \tilde{\gamma} : I \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0) = p$:

$$\forall f \in \mathcal{F}(M) : \left. \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} f(\tilde{\gamma}(t)) \right|_{t=0}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left. \frac{d}{dt} \xi(\gamma(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \xi(\tilde{\gamma}(t)) \right|_{t=0}$$

für eine (und damit jede) Karte $\xi = (x^1, \dots, x^n) : U \rightarrow \xi(U)$ um p .

Aufgabe 11 (Glatte Kurven II). Sei $\mathbb{S}^3$ die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{C}^2$. Für jedes $z = (z^1, z^2) \in \mathbb{S}^3$, wobei $z^1 = x^1 + ix^2, z^2 = x^3 + ix^4 \in \mathbb{C}$ und $x^1, x^2, x^3, x^4 \in \mathbb{R}$, betrachten Sie die Kurve $\gamma_z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^3$, die durch

$$\gamma_z(t) = (e^{it}z^1, e^{it}z^2)$$

definiert ist.

Definition: Für jedes $p = (x^1, x^2, x^3, x^4) \neq (0, 0, 0, 1) \in \mathbb{S}^3$ definieren wir *stereographische Koordinaten* wie folgt: für $i = 1, 2, 3$

$$u^i = \frac{x^i}{1 - x^4}.$$

- a) (2 Punkte) Es sei $z^1 \neq 0$. Berechnen Sie die Koordinatendarstellung der Kurve γ_z in stereographischen Koordinaten und zeigen Sie, dass γ_z eine glatte Kurve ist.
- b) (2 Punkte) Berechnen Sie $\dot{\gamma}_z(t)$ in stereographischen Koordinaten, und zeigen Sie, dass für jedes $t \in \mathbb{R}$ für den Tangentialvektor $\dot{\gamma}_z(t) \neq 0$ gilt.

Aufgabe 12 (Die Neilsche Parabel).

- a) (2 Punkte) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine glatte Untermannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass die Inklusionsabbildung $\iota : M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ glatt ist.
- b) (2 Punkte) Betrachten Sie die Neilsche Parabel P_a :

$$P_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - a^2x^3 = 0\},$$

wobei $a \in \mathbb{R}, a > 0$. Zeigen Sie, dass es auf P_a einen glatten Atlas gibt, aber dass P_a keine glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.