Prof. Dr. Katrin Wendland
Mara Ungureanu
Mathematisches Institut
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Differentialgeometrie I
WS 2018/19
25. Oktober, 2018

Übungsblatt 2

Abgabe: 2. November, 2018, 9:00 Uhr

Aufgabe 5 (Glatte Abbildungen)**.** Seien M, N, und P glatte Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie:

a) (1 Punkt) Jede glatte Abbildung $f : M \to N$ ist stetig.

b) (1 Punkt) Falls die Abbildungen $f : M \to N$ und $g : N \to P$ glatt sind, dann ist die Verknüpfung $g \circ f : M \to P$ auch glatt.

c) (2 Punkte) Die folgende Aussagen sind äquivalent:

   i) Die Abbildung $f : M \to N$ ist glatt.
   ii) Die Verknüpfung $g \circ f$ ist für alle glatten Funktionen $g : N \to \mathbb{R}$ auch glatt.
   iii) Für jedes $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset M$ von p, so dass $f|_U$ glatt ist.

Aufgabe 6 (Mannigfaltigkeiten I)**.**

a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n ist.

b) (2 Punkte) Sei $\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid ||x|| = 1\}$ der Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$ mit der induzierten Topologie. Zeigen Sie, dass ein Atlas auf $\mathbb{S}^1$ mindestens zwei Karten haben muss.

c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\mathbb{S}^1$ eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension 1 ist.

Aufgabe 7 (Mannigfaltigkeiten II)**.**

1. (2 Punkte) Seien M und N zwei glatte Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie, dass das Kartesische Produkt $M \times N$ auch eine glatte Mannigfaltigkeit ist.

   Hinweis: Man darf die Produkttopologie ohne Beweis benutzen.

2. (2 Punkte) Sei $T^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2 + z^2 = \frac{1}{4}\}$ der Torus in $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass T^2 eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension 2 ist.

   Hinweis: Betrachten Sie die Zylinderkoordinaten:

$$x = r\cos\theta, \; y = r\sin\theta, \; z = z.$$

Aufgabe 8 (Tangentialräume)**.** Seien $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid ||x|| = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ die Einheitssphäre mit der induzierten Topologie von $\mathbb{R}^3$ und

$$\xi : \mathbb{S}^2 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \mid y = 0\} \to (0, \pi) \times (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2$$

die Karte von $\mathbb{S}^2$, die gegeben ist durch:

$$\xi^{-1}(\theta, \phi) = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta).$$

a) (2 Punkte) Bestimmen Sie für jedes $p \in \mathbb{S}^2 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \mid y = 0\}$ Kurven $\gamma_\theta(t)$ und $\gamma_\phi(t)$ in $\mathbb{S}^2$, so dass die Vektoren $\partial_\theta|_p$ und $\partial_\phi|_p \in T_p\mathbb{S}^2$ die Richtungsableitung entlang γ_θ und γ_ϕ in $t = 0$ sind. Berechnen Sie explizit die Vektoren $v_\theta = \dot{\gamma}_\theta(0)$ und $v_\phi = \dot{\gamma}_\phi(0)$.

b) (1 Punkt) Sei $n_p = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass die Vorschriften

$$\partial_\theta|_p \mapsto v_\theta, \ \partial_\phi|_p \mapsto v_\phi$$

einen linearen Isomorphismus

$$I : T_p\mathbb{S}^2 \to \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle v, n_p \rangle = 0\}$$

induzieren, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standard-Skalarprodukt in $\mathbb{R}^3$ ist.

c) (1 Punkt) Berechnen Sie die Skalarprodukte $\langle v_\theta, v_\theta \rangle$, $\langle v_\theta, v_\phi \rangle$, und $\langle v_\phi, v_\phi \rangle$.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.