

Übungsblatt 14

Hinweis: Dieses Übungsblatt bleibt unbewertet.

Aufgabe 52 (Ricci-Krümmung, Schnittkrümmung).

- a) Sei $n > 1$ und (\mathcal{H}^n, g) das Hyberboloid-Modell des Hyperbolischen Raumes aus Aufgabe 38. Zeigen Sie: Für die Schnittkrümmung K von \mathcal{H}^n gilt überall:

$$K = -1.$$

- b) Sei $n > 1$ und $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die Einheitsphäre mit der Standardmetrik g . Zeigen Sie: Für die Schnittkrümmung K von \mathbb{S}^n gilt überall:

$$K = 1.$$

- c) Seien (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und K, Ric , und s die Schnitt-, Ricci-, und Skalarkrümmung von (M, g) . Betrachten Sie eine andere Metrik $\tilde{g} := r^2 g$ auf M , wobei $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Seien \tilde{K}, \tilde{Ric} , und \tilde{s} die Schnitt-, Ricci-, und Skalarkrümmung von (M, \tilde{g}) . Zeigen Sie: Es gilt:

$$\tilde{K} = \frac{1}{r^2} K, \quad \tilde{Ric} = Ric, \quad \tilde{s} = \frac{1}{r^2} s.$$

Nutzen Sie Aufgabe 50 um die Schnitt-, Ricci-, und Skalarkrümmung der Sphäre \mathbb{S}_r^2 mit der Standardmetrik zu bestimmen.

- d) Sei (M, g) eine n -dimensionale semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, und überall gilt $K = k$, wobei $k \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: $Ric = (n - 1)kg$.