Prof. Dr. Katrin Wendland
Mara Ungureanu
Mathematisches Institut
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Differentialgeometrie I
WS 2018/19
24. Januar, 2018

# Übungsblatt 13

*Hinweis:* Dieses Übungsblatt bleibt unbewertet.

**Aufgabe 48** (Jacobifelder)**.** Seien $(M, g)$ eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, $\gamma : [a, b] \to M$ eine Geodätische, und $Z$ das Jacobi-Vektorfeld einer geodätischen Variation von $\gamma$. Zeigen Sie: $[\dot{\gamma}(t), Z(t)] = 0$ für alle $t \in (a, b)$.

**Aufgabe 49** (Kovariante Ableitungen von Tensorfeldern)**.** Seien $M$ eine glatte Mannigfaltigkeit und $\nabla$ ein Zusammenhang auf $M$.

a) Zeigen Sie: Falls $\vartheta \in \mathcal{X}^*(M)$, dann ist $\nabla_X \vartheta \in \mathcal{X}^*(M)$ für alle $X \in \mathcal{X}(M)$, wobei

$$\forall Y \in \mathcal{X}(M)\colon\ (\nabla_X \vartheta)(Y) := \nabla_X(\vartheta(Y)) - \vartheta(\nabla_X Y).$$

b) Seien $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$ und $\vartheta^1, \ldots, \vartheta^r \in \mathcal{X}^*(M)$, $X_1, \ldots, X_s \in \mathcal{X}(M)$. Zeigen Sie: $\nabla_X A \in \mathcal{T}^r_s(M)$ wobei

$$\begin{aligned}\nabla_X A :=& \nabla_X(A(\vartheta^1, \ldots, \vartheta^r, X_1, \ldots, X_s)) \\ &- \sum_{i=1}^{r} A(\vartheta^1, \ldots, \nabla_X \vartheta^i, \ldots, \vartheta^r, X_1, \ldots, X_s) \\ &- \sum_{j=1}^{s} A(\vartheta^1, \ldots, \vartheta^r, X_1, \ldots, \nabla_X X_j, \ldots, X_s).\end{aligned}$$

c) Zeigen Sie: $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{T}^r_s(M) \to \mathcal{T}^r_{s+1}(M)$.

**Aufgabe 50** (Der Riemannsche Krümmungstensor I)**.** Seien $(M, g)$ eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n$ und $R : \mathcal{X}^3(M) \to \mathcal{X}(M)$ der Riemannsche Krümmungstensor.

a) Zeigen Sie: Bezüglich lokaler Koordinaten $\xi = (x^1, \ldots, x^n) : U \to \xi(U)$ hat der Tensor $R$ genau $n^2(n^2 - 1)/12$ unabhängige Komponenten $R_{ijkm}$, wobei

$$R_{ijkm} := g(R_{\partial_k, \partial_m} \partial_j, \partial_i).$$

b) Sei $M = \mathbb{S}^2$ die Einheitssphäre mit der Standardmetrik

$$g = d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi,$$

wobei $\theta \in (0, \pi)$ und $\phi \in (0, 2\pi)$ die üblichen Polarkoordinaten sind. Berechnen Sie die Komponenten des Krümmungstensors $R$ von $\mathbb{S}^2$ bezüglich der Polarkoordinaten.

c) Sei $\mathbb{S}^2_r = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = r\} \subset \mathbb{R}^3$ die Sphäre vom Radius $r$ mit der vom Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ induzierten Metrik $g'$.
*Definition:* Zwei semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten $(M, g)$ und $(M', g')$ heißen *isometrisch* wenn ein Diffeomorphismus $f : M \to M'$ existiert, so dass $g = f^* g'$.
Zeigen Sie: $(\mathbb{S}^2, r^2 g)$ und $(\mathbb{S}^2_r, g')$ sind isometrisch.

d) Zeigen Sie: Die Komponenten des Riemannschen Krümmungstensors von $(\mathbb{S}^2_r, g')$ stimmen mit denen von $(\mathbb{S}^2, r^2 g)$ überein.

**Aufgabe 51** (Der Riemannsche Krümmungstensor II)**.** Sei $T \subset \mathbb{R}^3$ der Torus mit der Parametrisierung

$$\begin{aligned} x &= (b + a\cos v)\cos u \\ y &= (b + a\cos v)\sin u \\ z &= a\sin v, \end{aligned}$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$, $b > a$ und $u, v \in (0, 2\pi)$.

a) Zeigen Sie: Die von der Standardmetrik auf $\mathbb{R}^3$ induzierte Metrik auf $T$ ist

$$g = (b + a\cos v)^2 du \otimes du + a^2 dv \otimes dv.$$

b) Berechnen Sie die Komponenten des Riemannschen Krümmungstensors von $(T, g)$.