Prof. Dr. Katrin Wendland
Mara Ungureanu
Mathematisches Institut
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Differentialgeometrie I
WS 2018/19
17. Januar, 2018

Übungsblatt 12

Abgabe: 24. Januar, 2019, 12:00 Uhr

Hinweis: Dies ist das letzte bewertete Übungsblatt.

Aufgabe 44 (Die Liegruppe $SU(n)$).

a) (2 Punkte) Finden Sie alle 1-Parameter Untergruppen von $SU(2)$.

b) (2 Punkte) Zeigen Sie: $SU(n)$ trägt eine biinvariante Metrik.

Aufgabe 45 (Der Torus als Liegruppe). Sei $\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid ||x|| = 1\}$ der Einheitskreis. Für jedes $p \in \mathbb{S}^1$ betrachten Sie die Koordinaten $p = (\sin\theta, \cos\theta)$ und den Isomorphismus $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, $p \mapsto e^{i\theta}$ für $p \in \mathbb{S}^1$.

a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\mathbb{S}^1$ eine Liegruppe der Dimension 1 ist.

b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\mathbb{S}^1 \simeq SO(2) \simeq U(1)$.

c) (2 Punkte) Berechnen Sie alle Geodätischen auf dem n-Torus $\mathbb{S}^1 \times \ldots \times \mathbb{S}^1$.

Aufgabe 46 (Matrix-Liegruppen und 1-Parameter-Untergruppen).

a) (1 Punkt) Es sei G eine Matrix-Liegruppe, d. h. $G \subset \mathrm{Mat}_k(n \times n)$ mit $k = \mathbb{R}$ oder $k = \mathbb{C}$ eine Untermannigfaltigkeit, und wir identifizieren $T_{\mathrm{id}}G$ mit einem Unterraum von $\mathrm{Mat}_k(n \times n)$. Betrachten Sie für $A \in \mathfrak{g} = T_{\mathrm{id}}G$ eine glatte Kurve $\alpha : \mathbb{R} \to G$ mit $\alpha(0) = \mathrm{id}$, $\dot\alpha(t) = \alpha(t)A$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie durch direktes Nachrechnen in $\mathrm{Mat}_k(n \times n)$, dass

$$\forall B \in \mathfrak{g}\colon \frac{d}{dt}\Big(\alpha(t)B(\alpha(t))^{-1}\Big)\Big|_{t=0} = AB - BA.$$

b) Seien $\gamma : \mathbb{R} \to G$ eine 1-Parameter-Untergruppe von G und

$$H := \{\gamma(t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Zeigen Sie:

i) (2 Punkte) H ist eine abelsche Lie-Untergruppe von G der Dimension 1 oder 0.

ii) (1 Punkt) H ist isomorph entweder zu $(\mathbb{R}, +)$ oder zu $(U(1), \cdot)$, oder zu $(\{1\}, \cdot)$.

Aufgabe 47 (Liegruppen und der Riemannsche Krümmungstensor).

a) (2 Punkte) Sei G eine Liegruppe der Dimension n. Zeigen Sie: Das Tangentialbündel von G ist trivial (siehe Aufgabe 14).
Hinweis: Betrachten Sie eine Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von $T_{\mathrm{id}}G$.

b) (2 Punkte) Seien M eine glatte Mannigfaltigkeit und ∇ ein Zusammenhang auf M. Zeigen Sie: die Abbildung

$$\begin{aligned} R : \mathcal{X}^3(M) &\to \mathcal{X}(M) \\ (X, Y, Z) &\mapsto R_{X,Y}Z, \end{aligned}$$

die durch $R_{X,Y}Z := \nabla_{[X,Y]}Z + \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z$ definiert ist, ist ein Tensorfeld vom Typ $(1, 3)$.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.