Prof. Dr. Katrin Wendland
Mara Ungureanu
Mathematisches Institut
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Differentialgeometrie I
WS 2018/19
10. Januar, 2018

Übungsblatt 11

Abgabe: 17. Januar, 2019, 12:00 Uhr

Hinweis: Dies ist das vorletzte bewertete Übungsblatt.

Aufgabe 40 (Die komplexe allgemeine lineare Gruppe)**.**

a) (1 Punkt) Zeigen Sie:

$$GL_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n) \mid \det A \neq 0\}$$

ist eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $2n^2$ und eine Lie Gruppe.

b) (1 Punkt) Zeigen Sie:

$$U(n) := \{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n) \mid \bar{A}^T A = E\} \text{ und}$$

$$SU(n) := \{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n) \mid \bar{A}^T A = E \text{ und } \det A = 1\}$$

sind Untermannigfaltigkeiten von $GL_n(\mathbb{C})$ und damit Lie Gruppen. Berechnen Sie ihre Dimensionen.

c) (2 Punkte) Berechnen Sie die Tangentialräume von $GL_n(\mathbb{C})$, $U(n)$, und $SU(n)$ in beliebigen Punkten.

Aufgabe 41 (Links- und Rechtsmultiplikation, Lie-Klammer)**.** Seien G eine Lie Gruppe und $a, b \in G$.

a) (2 Punkte) Zeigen Sie: die Linksmultiplikation $L_a : G \to G$, $L_a(b) = a \cdot b$ und die Rechtsmultiplikation $R_a : G \to G$, $R_a(b) = b \cdot a$ sind Diffeomorphismen.

b) (2 Punkte) Seien $A, B \in T_{id}\, G$. Für alle $a, b \in G$ setzen wir $X_a := DL_a(A)$ und $Y_b := DL_b(B)$, so dass $X, Y \in \mathcal{X}^G(G)$ mit $X_{id} = A$ und $Y_{id} = B$. Zeigen Sie:

$$[A, B] := [X, Y]_{id} \in T_{id}\, G$$

liefert eine Lie-Klammer $[\cdot, \cdot] : T_{id}\, G \times T_{id}\, G \to T_{id}\, G$.

Aufgabe 42 (Das Exponential)**.** Sei $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$. Wir definieren das *Exponential von A* durch die Potenzreihe

$$e^A := \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} A^k, \text{ wobei } A^0 := E.$$

Man darf annehmen, dass die Reihe immer konvergiert d.h., dass das Exponential von A wohldefiniert ist.

a) (1 Punkt) Seien $A, B \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ so dass $AB = BA$. Zeigen Sie:

$$e^A \cdot e^B = e^{A+B}. \qquad (*)$$

Nutzen Sie die Gleichung $(*)$ um zu zeigen, dass $e^A \in GL_n(\mathbb{C})$.

b) (1 Punkt) Finden Sie ein Gegenbeispiel zur Gleichung $(*)$ in dem Fall $AB \neq BA$.

c) (2 Punkte) Zeigen Sie: Die Abbildung

$$\exp : T_{id}\, SO(3) \to SO(3),$$

die durch $A \mapsto e^A$ definiert ist, ist wohldefiniert.
Hinweis: Zeigen Sie erst, dass

$$\forall A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n): \ \det(e^A) = e^{Tr(A)}$$

mithilfe der Jordan-Normalform J_A von A wobei $PAP^{-1} = J_A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ und $P \in GL_n(\mathbb{C})$ ist.

Aufgabe 43 (Die Gruppe $SU(2)$)**.** Betrachten Sie die Gruppe $SU(2)$ aus Aufgabe 40b).

a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

eine Basis von $T_E\,(SU(2))$ bilden. Berechnen Sie $[\sigma_i, \sigma_j]$ für alle $1 \leq i, j \leq 3$.

b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $SU(2)$ diffeomorph zur Einheitssphäre $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ ist.
Hinweis: Stellen Sie $\mathbb{S}^3$ als

$$\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$$

dar, und betrachten Sie die Abbildung $\Phi : \mathbb{S}^3 \to SU(2)$, die durch

$$\Phi(z, w) = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$$

definiert ist.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.