

Übungsblatt 10

Abgabe: 10. Januar, 2019, 12:00 Uhr

Aufgabe 36 (Der Minkowski Raum). Sei $(\mathbb{R}^{n+1}, g_M)$ der $(n+1)$ -dimensionale Minkowski Raum, d. h. in der Notation von Aufgabe 24:

$$V = \mathbb{R}^{n+1}, \langle x, y \rangle = -x^0 y^0 + \sum_{i=1}^n x^i y^i, g_M = -dx^0 \otimes dy^0 + \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dy^i,$$

bezüglich der Standardbasis in $\mathbb{R}^{n+1}$. Für jedes $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sei

$$\mathcal{P}_a := \{p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle p, p \rangle = a\}.$$

- a) (2 Punkte) Zeigen Sie: Für jedes $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist $\mathcal{P}_a$ eine glatte n -dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$.

Hinweis: Nutzen Sie den Satz vom regulären Wert.

- b) (2 Punkte) Seien $j_a : \mathcal{P}_a \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ die Inklusion und $g_a := j_a^* g_M$ die induzierte Metrik auf $\mathcal{P}_a$. Zeigen Sie: g_a ist eine semi-Riemannsche Metrik auf $\mathcal{P}_a$. Darüber hinaus berechnen Sie den Index dieser Metrik.

Hinweis: Zeigen Sie: $(Dj_a)_p$ liefert einen Isomorphismus

$$T_p \mathcal{P}_a \simeq \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle p, v \rangle = 0\}.$$

In Aufgaben 37-39 wird analog zu Aufgabe 36 b) für die Untermannigfaltigkeiten $M = \mathbb{S}^n$ und $M = \mathcal{H}^n$ von $\mathbb{R}^{n+1}$ der natürliche Isomorphismus $T_p M \simeq \langle p \rangle^\perp$ verwendet, der durch die Inklusion induziert ist.

Aufgabe 37 (Lokale Positionsvektorfelder und Variationen).

- a) (1 Punkt) Seien M eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$, und $\xi = (x^1, \dots, x^n) : U \rightarrow \xi(U)$ Riemannsche Normalkoordinaten um p , mit $\tilde{U} = \exp_p^{-1}(U) \subset T_p M$. Sei $\tilde{P} \in \mathcal{X}(\tilde{U})$ das Positionsvektorfeld. Zeigen Sie: Das lokale Positionsvektorfeld $P := D \exp_p(\tilde{P}) \in \mathcal{X}(U)$ ist radial entlang jeder bzgl. p radialen Geodätische.

Seien $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die Einheitssphäre mit der von der Euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^{n+1}$ induzierten Metrik, $x \in \mathbb{S}^n$, und $v \in T_x \mathbb{S}^n$ mit $\|v\| = 1$.

- b) (1 Punkt) Zeigen Sie: Die Geodätische γ durch x mit $\dot{\gamma}(0) = v$ ist $\gamma(t) = \cos t \cdot x + \sin t \cdot v$.
- c) (1 Punkt) Sei $u \in T_x \mathbb{S}^n$ mit $u \perp v$ und $\|u\| = 1$. Zeigen Sie:

$$Y(t, \tau) = \cos t \cdot x + \sin t \cdot (\cos \tau \cdot v + \sin \tau \cdot u)$$

ist eine geodätische Variation von γ .

- d) (1 Punkt) Zeigen Sie: Das von Y induzierte Jacobi-Vektorfeld ist $J(t) = \sin t \cdot U(t)$, wobei $U(t)$ das Vektorfeld entlang γ mit $U(t) = u$ ist.

Aufgabe 38 (Das Poincaré-Ball-Modell des Hyperbolischen Raumes). Seien $(\mathbb{R}^{n+1}, g_M)$ der $(n+1)$ -dimensionale Minkowski Raum aus Aufgabe 36 und

$$\mathcal{H}^n := \mathcal{P}_{-1} \cap \{p = (p^0, \dots, p^n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid p_0 > 0\}$$

mit der von $(\mathbb{R}^{n+1}, g_M)$ induzierten Metrik g . Man nennt $(\mathcal{H}^n, g)$ das *Hyperboloid-Modell des Hyperbolischen Raumes*. Seien nun $\|\cdot\|_E$ die Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{B}^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_E < 1\}$ mit der Riemannschen Metrik

$$g_x^P := \frac{4}{(1 - \|x\|_E^2)^2} \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i$$

bezüglich der Standardkoordinaten auf $\mathbb{R}^n$. Betrachten Sie die sogenannte *pseudo-stereographische Projektion vom Pol* $s = (-1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, die durch

$$F : \mathcal{H}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$$

$$p \mapsto \frac{1}{1 + p^0}(p^1, \dots, p^n).$$

definiert ist. Zeigen Sie:

- (1 Punkt) Die Abbildung F ist wohldefiniert, d. h. $\|F(p)\|_E < 1$ für alle $p \in \mathcal{H}^n$.
- (1 Punkt) Die Abbildung F ist ein Diffeomorphismus.
- (2 Punkte) Die Abbildung F ist eine Isometrie $(\mathcal{H}^n, g) \rightarrow (\mathbb{B}^n, g^P)$.

Aufgabe 39 (Jacobi-Vektorfelder auf dem Hyperbolischen Raum). Seien $(\mathcal{H}^n, g)$ das Hyperboloid-Modell des hyperbolischen Raumes (vgl. Aufgabe 38), $p \in \mathcal{H}^n$, und $v \in T_p \mathcal{H}^n$ mit $g_p(v, v) = 1$.

- (2 Punkte) Zeigen Sie: Die Geodätische durch p mit $\dot{\gamma}(0) = v$ ist $\gamma(t) = \cosh t \cdot p + \sinh t \cdot v$.
- (1 Punkt) Sei $u \in T_p \mathcal{H}^n$ mit $u \perp v$ und $g_p(u, u) = 1$. Zeigen Sie:

$$Y(t, \tau) = \cosh t \cdot p + \sinh t \cdot (\cos \tau \cdot v + \sin \tau \cdot u)$$

ist eine geodätische Variation von γ .

- (1 Punkt) Zeigen Sie: Das von Y induzierte Jacobi-Vektorfeld ist $J(t) = \sinh t \cdot U(t)$, wobei $U(t)$ das Vektorfeld entlang γ mit $U(t) = u$ ist.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.