Prof. Dr. Katrin Wendland
Mara Ungureanu
Mathematisches Institut
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Differentialgeometrie I
WS 2018/19
18. Oktober, 2018

Übungsblatt 1

Abgabe: 25. Oktober, 2018, 12:00 Uhr

In folgenden sei $D_r(p)$ die offene Kugel in $\mathbb{R}^n$ mit Radius r um p.

Aufgabe 1 (Satz über die Umkehrfunktion). Betrachten Sie die folgende Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) &\mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta). \end{aligned}$$

a) (2 Punkte) L sei eine vertikale Gerade in $\mathbb{R}^2$ (also parametrisiert durch (c_1, θ), wobei c_1 eine reelle Konstante ist). Was ist das Bild von L unter f? Und das Bild einer horizontalen Gerade (also einer Geraden, die parametrisiert ist durch (r, c_2), wobei c_2 auch eine reelle Konstante ist)? Ist die Funktion f injektiv?

b) (2 Punkte) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix und -Determinante der Funktion f und finden Sie alle Punkte, wo f eine lokale Umkehrfunktion hat. Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix und -Determinante dieser Umkehrfunktion, ohne die Umkehrfunktion zu berechnen.

Aufgabe 2 (Koordinatentransformationen, Substitutionsregel). Betrachten Sie dieselbe Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wie in Aufgabe 1.

a) (2 Punkte) Sei jetzt

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta, \\ y &= r\sin\theta. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie nun explizit die Umkehrfunktionen $f^{-1}(x, y)$ für alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ wo sie tatsächlich existieren und berechnen Sie direkt deren Jacobi-Matrix und -Determinante bezüglich x und y. Vergleichen Sie die Antwort mit der von Aufgabe 1.

Hinweis: Man darf die Ableitung $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ ohne Beweis benutzen.

b) (1 Punkt) Betrachten Sie jetzt die Punkte

$$p_1 = \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right),\ p_2 = \left(\sqrt{2}, \frac{9\pi}{4}\right) \in \mathbb{R}^2,$$

und bestimmen Sie die entsprechenden lokalen Umkehrfunktionen für f nahe p_1 bzw. p_2.

c) (1 Punkt) Benutzen Sie die Substitution

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta, \\ y &= r\sin\theta, \end{aligned}$$

um das Integral

$$\int_{D_1(0,0)} e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

zu berechnen.

Aufgabe 3. Zeigen Sie:

a) (1 Punkt) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(t) := \begin{cases} e^{-1/t} & \text{falls } t > 0, \\ 0 & \text{falls } t \leq 0, \end{cases}$$

ist glatt.

b) (2 Punkte) Es gibt eine glatte Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

  i) $h(t) \equiv 1$ falls $t \leq 1$,
  ii) $0 < h(t) < 1$ falls $1 < t < 2$,
  iii) $h(t) \equiv 0$ falls $t \geq 2$.

  Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $\frac{f(2-t)}{f(2-t)+f(t-1)}$.

c) (1 Punkt) Es gibt eine glatte Funktion $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

  i) $0 \leq H(x) \leq 1$ überall,
  ii) $H \equiv 1$ auf $D_1(0)$,
  iii) $H \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus D_2(0)$.

Aufgabe 4 (Hausdorff Räume)**.**
Definition: Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *Hausdorff Raum* wenn

$$\forall x, y \in X \text{ mit } x \neq y, \exists\, U, V \in \mathcal{T} \text{ so dass } x \in U,\ y \in V \text{ und } U \cap V = \emptyset.$$

Betrachten Sie X, die *reelle Gerade mit einem doppelten Punkt*, also $X = \mathbb{R} \cup \{\star\}$ mit der Topologie

$$\mathcal{T} = \{U \subset X \mid U \subset \mathbb{R} \text{ offen oder } (U \setminus \{\star\}) \cup \{0\} \subset \mathbb{R} \text{ offen}\}.$$

a) (1 Punkt) Geben Sie zwei Mengen U_1, U_2 in $\mathcal{T}$ an, so dass U_1 den Punkt $\star$ enthält und U_2 nicht.

b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X definiert.

c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $(X, \mathcal{T})$ kein Hausdorff Raum ist.

d) (1 Punkt) Gibt es eine andere Topologie auf X, so dass $(X, \mathcal{T})$ ein Hausdorff Raum ist?

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.