Prof. Dr. Katrin Wendland
PD Dr. Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Lineare Algebra I

WS 15/16

Übungsblatt 9

33. (4 Punkte) Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^4$ über $\mathbb{R}$ mit Standard-Basis $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$, wobei

$$e_0 := \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, e_1 := \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, e_2 := \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, e_3 := \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Wir definieren eine Verknüpfung $\bullet : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ wie folgt: Auf den Basisvektoren soll gelten:

$$\begin{aligned} e_0 \bullet e_k = e_k \bullet e_0 &= e_k, && \forall\, k \in \{0,1,2,3\}, \\ e_k \bullet e_k &= -e_0, && \forall\, k \in \{1,2,3\}, \\ e_{\sigma(1)} \bullet e_{\sigma(2)} &= \operatorname{sign}(\sigma) e_{\sigma(3)}, && \forall\, \sigma \in S_3. \end{aligned}$$

Für beliebige Linearkombinationen $x = \sum_{i=0}^{3} x_i e_i \in \mathbb{R}^4$ und $y = \sum_{j=0}^{3} y_j e_j \in \mathbb{R}^4$ definieren wir $x \bullet y := \sum_{i,j=0}^{3} (x_i y_j) e_i \bullet e_j$. Zeigen Sie, daß $(\mathbb{R}^4, +, \bullet)$ ein Schiefkörper, aber kein Körper ist.

Hinweis: Für die Existenz von multiplikativ Inversen zeigen Sie zuerst für $x = \sum_{i=0}^{3} x_i e_i$, daß gilt: $(x_0 e_0 - x_1 e_1 - x_2 e_2 - x_3 e_3) \bullet x = \left(\sum_{i=0}^{3} x_i^2\right) e_0$.

34. Es seien K ein Körper und V ein Vektorraum über K. Bilden folgende Teilmengen $B \subset V$ eine Basis von V (mit Beweis) ?

    (a) (1 Punkt) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $B = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x = 0 \vee y = 0 \right\}$.

    (b) (1 Punkt) $K = \mathbb{F}_5$, $V = \mathbb{F}_5^3$, $B = \left\{ \begin{pmatrix}[0]\\[4]\\[1]\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}[2]\\[3]\\[1]\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}[1]\\[2]\\[0]\end{pmatrix} \right\}$.

    (c) (1 Punkt) $K = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{R}^1$, $B = \{(1), (\sqrt{2})\}$.

    (d) (1 Punkt) $K = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{Q}^3$, $t \in \mathbb{Q}$, $B_t = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\t\\11\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-4\\0\end{pmatrix} \right\}$.

35. (a) (2 Punkte) Es seien K ein Körper, $f, g \in K[x]$ mit $\deg g \geq 0$. Zeigen Sie, daß es eindeutig bestimmte Polynome $q, r \in K[x]$ gibt, so daß $f = qg + r$ mit $\deg r < \deg g$.

    Hinweis: Setzen Sie $f_0 := f$ und vergleichen Sie den Term höchsten Grades von f_0 mit dem Term höchsten Grades von g. Durch Subtraktion eines geeigneten Vielfachen von g erhalten Sie ein Polynom f_1 mit $\deg f_1 < \deg f_0$. Wiederholen Sie diesen Schritt für f_1.

    (b) (1 Punkt) Bestimmen Sie $q, r \in \mathbb{Q}[x]$ aus Teilaufgabe (a) für $f, g \in \mathbb{Q}[x]$ gegeben durch $f(x) = x^5 - 2x^4 - x$ und $g(x) = x^3 - 1$.

    (c) (1 Punkt) Bestimmen Sie $q, r \in \mathbb{Q}[x]$ aus Teilaufgabe (a) für $f, g \in \mathbb{Q}[x]$ gegeben durch $f(x) = x^n - 1$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, und $g(x) = x - 1$.

36. Es sei K ein Körper.

    (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Basis von $K[x]$ ist.

    (b) (2 Punkte) Wir definieren für alle $a \in K$ die Abbildung $\delta_a \in \mathrm{Abb}(K, K)$ durch $\delta_a(x) := 1$, falls $x = a$, und $\delta_a(x) := 0$, falls $x \neq a$. Ist $(\delta_a)_{a\in K}$ eine Basis für $\mathrm{Abb}(K, K)$ (mit Beweis) ?

    (c) (1 Punkt) Es sei nun $K = \mathbb{F}_3$. Wir betrachten die Abbildung $F : \mathbb{F}_3[x] \to \mathrm{Abb}(\mathbb{F}_3, \mathbb{F}_3), F(p) := \mathrm{ev}(p, -)$ für $p \in \mathbb{F}_3[x]$, also $F(p)(a) := p(a)$ für alle $a \in \mathbb{F}_3$. Drücken Sie $F(x^n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ als Linearkombination der $(\delta_a)_{a\in\mathbb{F}_3}$ aus. Bildet $(F(x^n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Basis von $\mathrm{Abb}(\mathbb{F}_3, \mathbb{F}_3)$ (mit Beweis) ?

    Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 28(c).

Abgabetermin: Donnerstag, 7. Januar 2016 um 08:00 Uhr