Prof. Dr. Katrin Wendland
PD Dr. Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Lineare Algebra I

WS 15/16

Übungsblatt 8

29. Es seien K ein Körper, X eine Menge und $\mathrm{Abb}(X, K) := \{f : X \to K\}$. Wir definieren für alle $f, g \in \mathrm{Abb}(X, K)$ und alle $\lambda \in K$ die Abbildungen:

$$f + g \in \mathrm{Abb}(X, K) \text{ ist definiert durch } (f + g)(x) := f(x) + g(x)\,\forall x \in X,$$
$$\lambda f \in \mathrm{Abb}(X, K) \text{ ist definiert durch } (\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x)\,\forall x \in X.$$

   (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß $\mathrm{Abb}(X, K)$ mit dieser Addition und mit $K \times \mathrm{Abb}(X, K) \to \mathrm{Abb}(X, K), (\lambda, f) \mapsto \lambda f$ als skalarer Multiplikation ein Vektorraum über K ist.

   (b) (2 Punkte) Es seien $X = K = \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, daß die Teilmenge $\{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(x) = (-1)^m f(-x)\,\forall x \in \mathbb{R}\} \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ein Untervektorraum ist.

30. Sind folgende Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$ (mit Beweis) ?

   (a) (1 Punkt) Für $k \in \mathbb{Z} : A_k := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^k\}$.

   (b) (1 Punkt) Für $r \in \mathbb{R}_{\geq 0} : B_r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$.

   (c) (1 Punkt) Für $b \in \mathbb{R} : C_b := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = b\}$.

   (d) (1 Punkt) Für $c \in \mathbb{R} : D_c := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq c\}$.

31. Es sei K ein Körper.

   (a) (1 Punkt) Es sei $K[x]$ versehen mit der Addition aus Aufgabe 27 und der skalaren Multiplikation $K \times K[x] \to K[x], (\lambda, p) \mapsto \lambda p$ gegeben durch $\lambda p(x) := \sum_{j=0}^{M} (\lambda \cdot a_j) x^j$ für $p \in K[x]$ mit $p(x) = \sum_{j=0}^{M} a_j x^j$. Zeigen Sie, daß $K[x]$ ein Vektorraum über K ist.

   (b) (1 Punkt) Es sei $d \in \mathbb{N}$. Wir definieren die Menge $P_d := \{p \in K[x] \mid p(\mu a) = \mu^d p(a)\,\forall a \in K, \forall \mu \in K\} \subset K[x]$. Ist P_d ein Untervektorraum von $K[x]$ (mit Beweis) ?

(c) (1 Punkt) Es sei $d \in \mathbb{N}$. Ist die Teilmenge $\{p \in K[x] \mid \deg p \leq d\} \subset K[x]$ ein Untervektorraum von $K[x]$ (mit Beweis) ?

(d) (1 Punkt) Es seien $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{R}[x]$ mit $p_1(x) = x^2 + \sqrt{2}, p_2(x) = -2x^3 + \sqrt{2}x^2 + x + 7$, $p_3(x) = -x^3 + \sqrt{5}, p_4(x) = \frac{1}{5}x - 1$. Drücken Sie $q \in \mathbb{R}[x]$ mit $q(x) = x^3$ als Linearkombination von p_1, p_2, p_3, p_4 aus.

32. Es sei K ein Körper. Bestimmen Sie das Erzeugnis $\operatorname{span}(E)$ von folgenden Teilmengen E eines K-Vektorraums V:

(a) (1 Punkt) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$.

(b) (1 Punkt) $K = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{Q}^3$, $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(c) (1 Punkt) $K = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}^3$, $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x - iy \\ iy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} iz \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y, z \in \mathbb{C} \right\}$.

(d) (1 Punkt) $K = \mathbb{F}_5$, $V = \mathbb{F}_5^2$, $E = \left\{ \begin{pmatrix} [2] \\ [3] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [4] \\ [1] \end{pmatrix} \right\}$.

Abgabetermin: Donnerstag, 17. Dezember 2015 um 08:00 Uhr