Prof. Dr. Katrin Wendland
PD Dr. Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Lineare Algebra I

WS 15/16

Übungsblatt 7

25. Wir definieren die Abbildung $^{-} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch $\overline{z} := x - iy$ für alle $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$. Diese Abbildung wird als komplexe Konjugation bezeichnet. Weiter definieren wir den Realteil $\operatorname{Re} z := x$ und den Imaginärteil $\operatorname{Im} z := y$ von $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

   (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß die komplexe Konjugation ein Automorphismus des Körpers $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist, also ein Körper-Isomorphismus von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$.

   (b) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß gilt: $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$. Bestimmen Sie $B := z\overline{z}$ als Funktion von $\operatorname{Re} z$ und $\operatorname{Im} z$, und drücken Sie $\frac{1}{z}$ mit Hilfe von $\overline{z}$ und B aus.

   (c) (2 Punkte) Bestimmen Sie für folgende komplexe Zahlen den Real- und Imaginärteil: $\left(\frac{8-i}{5+i}\right)^4$, $\frac{(1+i)^4}{(1-i)^3} + \frac{(1-i)^4}{(1+i)^3}$, $\sum_{k=0}^{7} \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^k$.

26. (a) (1 Punkt) Es sei $\varphi \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß für alle $m \in \mathbb{Z}$ gilt: $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^m = \cos(m\varphi) + i\sin(m\varphi)$. Benutzen Sie dazu vollständige Induktion.

   (b) (2 Punkte) Es sei $p \in \mathbb{C}[z]$ mit $p(z) = z^m - 1$ für $m \in \mathbb{N}$. $\zeta \in \mathbb{C}$ heisst m-te Einheitswurzel, falls ζ eine Nullstelle von p ist. Zeigen Sie, daß es zu jedem $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ genau m verschiedene m-te Einheitswurzeln gibt, nämlich $\zeta_m^{(k)} := \cos(2\pi\frac{k}{m}) + i\sin(2\pi\frac{k}{m})$, $k = 0, \ldots, m-1$.

   (c) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß gilt: $\sum_{k=0}^{m-1} \zeta_m^{(k)} = 0$ und $\prod_{k=0}^{m-1} \zeta_m^{(k)} = (-1)^{m+1}$. Erklären Sie damit das letzte Resultat aus Aufgabe 25(c).

27. Es seien $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring und $R[x]$ die Menge aller Polynome in der Variablen x über R.

   (a) (3 Punkte) Wir definieren für alle $p, q \in R[x]$ gegeben durch $p(x) = \sum_{j=0}^{M} a_j x^j$ und $q(x) = \sum_{k=0}^{N} b_k x^k$ folgende Verknüpfungen:

      $p + q \in R[x]$ ist definiert durch $(p+q)(x) := \sum_{i=0}^{\max\{M,N\}} (a_i + b_i) x^i$, wobei $a_j := 0 \,\forall\, j > N$ und $b_k := 0 \,\forall\, k > M$.

$p \cdot q \in R[x]$ ist definiert durch $(p \cdot q)(x) := \sum_{j=0}^{M} \sum_{k=0}^{N} (a_j \cdot b_k) x^{j+k}$.

Zeigen Sie, daß $(R[x], +, \cdot)$ ein kommutativer Ring ist.

(b) (1 Punkt) Es sei $R \neq \{0\}$. Wir definieren die Abbildung $' : R[x] \to R[x], p \mapsto p'$ wie folgt: Für $p \in R[x]$ gegeben durch $p(x) = \sum_{j=0}^{M} a_j x^j$ sei
$p'(x) := \sum_{j=1}^{M} (j \cdot a_j) x^{j-1}$, wobei $j \cdot a_j := \underbrace{a_j + \cdots + a_j}_{j-\text{mal}}$.

(Zur Erinnerung: Falls $M = 0$, ist die Summe nach Definition gleich Null.) Zeigen Sie, daß die Abbildung $'$ ein Gruppen-Homomorphismus $(R[x], +) \to (R[x], +)$ ist, aber kein Ring-Homomorphismus $(R[x], +, \cdot) \to (R[x], +, \cdot)$ ist.

28. Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $K[x]$ der Polynomring in der Variablen x über K.

(a) (1 Punkt) Es seien $K = \mathbb{F}_5$ und $p \in \mathbb{F}_5[x]$ mit $p(x) = x(x^4 + 4)$. Zeigen Sie, daß $p(a) = 0$ für alle $a \in \mathbb{F}_5$.

(b) (1 Punkt) Bestimmen Sie zu endlichen vielen Elementen $a_1, \ldots, a_m \in K$ ein Polynom $p \in K[x]$, $p \neq 0$, mit $p(a_i) = 0$ für alle $i = 1, \ldots, m$.

(c) (1 Punkt) Es sei K ein endlicher Körper. Zeigen Sie, daß es ein Polynom $p \in K[x]$ mit $\deg(p) > 0$ gibt, das keine Nullstellen in K hat.

(d) (1 Punkt) Es seien K ein endlicher Körper mit $|K| = m$, und $p \in K[x]$ mit $p(x) = x^m - x$. Zeigen Sie, daß $p(a) = 0$ für alle $a \in K$.

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 16(d).

Abgabetermin: Donnerstag, 10. Dezember 2015 um 08:00 Uhr