Prof. Dr. Katrin Wendland
PD Dr. Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Lineare Algebra I

WS 15/16

Übungsblatt 4

13. (4 Punkte) Es seien $(G, *)$ eine Gruppe und $H \subset G$, $H \neq \emptyset$ eine Teilmenge. Wir bezeichnen mit $*_H$ die Einschränkung der Verknüpfung von $*$ auf H. Zeigen Sie, daß $(H, *_H)$ genau dann eine Untergruppe von $(G, *)$ ist, wenn für alle $a, b \in H$ gilt: $a * b \in H$ und $a^{-1} \in H$.

14. Es sei $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$.
    (a) (2 Punkte) Es sei p ein Teiler von m. Zeigen Sie, daß $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ eine Untergruppe besitzt, welche isomorph zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist.
    (b) (2 Punkte) Wir definieren die symmetrische Gruppe auf m Elementen durch $(S_m := \mathrm{Aut}(\{1, \ldots, m\}), \circ)$, also die Menge der bijektiven Selbstabbildungen von $\{1, \ldots, m\}$ mit der Komposition als Verknüpfung. Zeigen Sie, daß S_m für alle $1 \leq p \leq m$, $p \in \mathbb{N}$, eine Untergruppe besitzt, welche isomorph zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist.

15. (a) (1 Punkt) Ist $|\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}| = |\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}|$? Beweisen Sie Ihre Behauptung.
    (b) (2 Punke) Ist $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ isomorph zu $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$? Beweisen Sie Ihre Behauptung.
    (c) (1 Punkt) Es sei $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ die multiplikative Gruppe der rationalen Zahlen. Es sei $G = \{\pm 1\} \subset \mathbb{Q}^*$. Zeigen Sie, daß G, versehen mit der Einschränkung der Multiplikation, eine Untergruppe von $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ ist, welche isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist.

16. Es sei G eine Gruppe mit Verknüpfung $*$ und $H \subset G$ eine Untergruppe.
    (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß $R := \{(a, b) \in G \times G \mid b^{-1} * a \in H\} \subset G \times G$ eine Äquivalenzrelation ist. Wir schreiben $a \sim_H b$ genau dann, wenn $(a, b) \in R$.
    (b) (1 Punkt) Mit der Notation wie in (a) schreibt man $G/H := G/\sim_H$ und für $a \in G$: $aH := [a]$. Zeigen Sie, daß für alle $a, b \in G$ gilt: $aH = \{a * h \mid h \in H\}$ und $|aH| = |bH|$.
    (c) (1 Punkt) Es sei nun G endlich. Zeigen Sie, daß gilt: $|G| = |G/H| \cdot |H|$.
    Bemerkung: Man schreibt auch $[G : H] := |G/H|$ und nennt dies den Index einer Untergruppe H in G.

(d) (1 Punkt) Es sei G eine endliche Gruppe und $a \in G$. Zeigen Sie, daß gilt: $\operatorname{ord}(a)$ ist ein Teiler von $|G|$. Existiert für jede endliche Gruppe G und für jeden Teiler M von $|G|$ ein $a \in G$ mit $\operatorname{ord}(a) = M$ (Beweis) ?

Abgabetermin: Donnerstag, 19. November 2015 um 08:00 Uhr