Prof. Dr. Katrin Wendland
PD Dr. Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Übungsblatt 3

9. (a) (2 Punkte) Wir betrachten $(\mathbb{N}, *)$ mit der Abbildung $* : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, (m, n) \mapsto m * n := m^n + n^m$. Zeigen Sie, daß $*$ eine kommutative Verknüpfung definiert, die nicht assoziativ ist.

   (b) (2 Punkte) Wir betrachten $(\mathbb{R}^3, \times)$ mit dem Kreuzprodukt $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, d.h. für $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ist $y \times z := \begin{pmatrix} y_2z_3 - y_3z_2 \\ y_3z_1 - y_1z_3 \\ y_1z_2 - y_2z_1 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, daß $\times$ eine Verknüpfung definiert, die weder assoziativ noch kommutativ ist.

10. Es sei $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ fest. Wir definieren eine Teilmenge $R_m := \{(a, b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid \exists\, k \in \mathbb{Z} : b - a = m \cdot k\}$ von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und verwenden die Notation $a \equiv b \bmod m :\Longleftrightarrow (a, b) \in R_m$, lies: „$a$ ist kongruent zu b modulo m“.

    (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß R_m eine Äquivalenzrelation ist.

    (b) (2 Punkte) Es seien $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$ mit $a_1 \equiv b_1 \bmod m$ und $a_2 \equiv b_2 \bmod m$. Zeigen Sie, daß gilt: $(a_1 + a_2) \equiv (b_1 + b_2) \bmod m$ und $a_1a_2 \equiv b_1b_2 \bmod m$.

11. (a) (2 Punkte) Es seien $(X, *)$ und $(Y, \bullet)$ Mengen mit Verknüpfungen und $\varphi : X \to Y$ eine bijektive Abbildung. Zeigen Sie, daß φ genau dann ein Isomorphismus ist, wenn φ^{-1} ein Isomorphismus ist.

    (b) (2 Punkte) Es sei $(Y, +)$ eine Menge mit assoziativer, kommutativer Verknüpfung „$+$“ sowie neutralem Element $0 \in Y$. Es sei $Y_{\neq 0} := Y \setminus \{0\}$ und wir setzen zusätzlich voraus, daß die Einschränkung der Verknüpfung auf $Y_{\neq 0}$ wiederum eine assoziative und kommutative Verknüpfung definiert, die wir ebenfalls mit $+$ bezeichnen. Weiter existiere eine „Nachfolger-Abbildung“ ν, das ist eine Bijektion $\nu : Y \to Y_{\neq 0}$, so daß für alle $y \in Y$ gilt: $\nu(y) = \nu(0) + y$. Zeigen Sie, daß es einen eindeutig bestimmten injektiven Homomorphismus $\varphi : (\mathbb{N}, +) \to (Y, +)$ gibt mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = \nu(0)$.

12. Es seien $(X, *)$ und $(Y, \bullet)$ Mengen mit Verknüpfungen.

    (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß durch $*$ und $\bullet$ eine Verknüpfung $\square$ auf $X \times Y$ induziert wird. Zeigen Sie, daß $\square$ kommutativ (assoziativ) ist, wenn sowohl $*$ als auch $\bullet$ kommutativ (assoziativ) sind.

(b) (1 Punkt) Wir setzen $(X, *) = (\mathbb{R}, \cdot)$ und $(Y, \bullet) = (\mathbb{R}, +)$. Zeigen Sie, daß die Abbildung $\psi : X \times Y \to \mathbb{R}^2, (r, \varphi) \mapsto (|r| \cos \varphi, |r| \sin \varphi)$ surjektiv ist.

(c) (2 Punkte) Es seien ψ sowie die Verknüpfung $\Box$ auf $X \times Y$ wie in den Aufgabenteilen (a) und (b). Zeigen Sie, daß es eine eindeutig bestimmte Verknüpfung $\odot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gibt, für die gilt: $\forall\, (r_k, \varphi_k) \in X \times Y : \psi\left((r_1, \varphi_1) \Box (r_2, \varphi_2)\right) = \psi(r_1, \varphi_1) \odot \psi(r_2, \varphi_2)$. Zeigen Sie, daß diese Verknüpfung folgende Eigenschaften besitzt: $\odot$ ist assoziativ, kommutativ und besitzt ein neutrales Element, und ist verschieden von der Vektor-Addition „+“ auf $\mathbb{R}^2$, also $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \left(\binom{x_1}{y_1}, \binom{x_2}{y_2}\right) \mapsto \binom{x_1+x_2}{y_1+y_2}$. Weiter besitzt jedes Element von $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ein Inverses und es gilt für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^2$: $(x + y) \odot z = x \odot z + y \odot z$.

Hinweis: Sie dürfen folgende trigonometrische Identitäten ohne Beweis verwenden:

$$\begin{aligned} \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) &= 1, \\ \cos(\varphi_1 + \varphi_2) &= \cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2), \\ \sin(\varphi_1 + \varphi_2) &= \cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2) + \cos(\varphi_2)\sin(\varphi_1). \end{aligned}$$

Abgabetermin: Donnerstag, 12. November 2015 um 08:00 Uhr

Mitteilung der Fachschaft Mathematik: Hast du Lust deine Kommiliton*innen besser kennen zu lernen und mit uns ein entspanntes Wochenende zu verbringen? Dann komm mit zur Erstsemesterhütte der Fachschaft! Alle weiteren Infos findest du ab sofort unter fachschaft.mathematik.uni-freiburg.de. Die Anmeldung ist kommenden Montag!