Prof. Dr. Katrin Wendland
PD Dr. Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Lineare Algebra I

WS 15/16

Übungsblatt 2

5. Es seien A, B Mengen, X, X' Teilmengen von A, Y, Y' Teilmengen von B, und $f: A \to B$ eine Abbildung. Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

   (a) (2 Punkte) $f(X \cup X') = f(X) \cup f(X'), \qquad f(X \cap X') \subset f(X) \cap f(X')$.

   (b) (1 Punkt) $f^{-1}(Y \cup Y') = f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Y'), \quad f^{-1}(Y \cap Y') = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Y')$.

   (c) (1 Punkt) $f^{-1}(B \setminus Y) = A \setminus f^{-1}(Y)$.

   Hinweis: Es seien U, V, W Mengen mit $U \subset V$ und $g: V \to W$ eine Abbildung. Für einige der Identitäten ist es hilfreich zu wissen, welche Beziehung zwischen den Bildmengen $g(U)$ und $g(V)$ gilt.

6. Bestimmen Sie, ob folgende Abbildungen injektiv, surjektiv, und bijektiv sind (mit Begründung). Bestimmen Sie die Umkehrabbildung, falls sie existiert.

   (a) (1 Punkt) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n+2, \qquad g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \mapsto n+1$.

   (b) (1 Punkt) $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, (m,n) \mapsto m+n$.

   (c) (1 Punkt) $f: \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}, n \mapsto f(n) = \begin{cases} 4, & \text{falls } n = 1, \\ 1, & \text{falls } n = 2, \\ 2, & \text{falls } n = 3, \\ 3, & \text{falls } n = 4. \end{cases}$

   (d) (1 Punkt) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

7. Es seien X, Y Mengen, $f: X \to Y$ und $g: Y \to X$ Abbildungen, so daß gilt: $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

   (a) (1 Punkt) f muss injektiv sein.

   (b) (1 Punkt) f muss surjektiv sein.

   (c) (1 Punkt) g muss injektiv sein.

   (d) (1 Punkt) g muss surjektiv sein.

8. Für $x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right), y = \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$, definieren wir die "Vektoraddition" und die "Multiplikation mit Skalaren" durch

$$x + y := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}, \qquad \lambda x := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}.$$

Weiter definieren wir für eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \text{mit } a_{ij} \in \mathbb{R}, 1 \leq i, j \leq 3,$$

die Matrix-Vektor-Multiplikation durch

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Es seien nun

$$A = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

und $L := \{t \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \mid t \in \mathbb{R}\}$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto Ax$.

(a) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß aus $x, y \in L, \lambda \in \mathbb{R}$ folgt, daß $x + y \in L, \lambda x \in L$.

(b) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß gilt: $A(x + y) = Ax + Ay$ und $A(\lambda x) = \lambda Ax$.

(c) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß $L = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = 0\}$. Ist f injektiv ?

Abgabetermin: Donnerstag, 5. November 2015 um 08:00 Uhr