Prof. Dr. Katrin Wendland
PD Dr. Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Lineare Algebra I

WS 15/16

Übungsblatt 13

Dieses Übungsblatt wird nicht korrigiert und bewertet. Sie sollen jedoch die Möglichkeit haben, auch den Stoff des letzten Teils der Vorlesung zu üben. Es dient auch zur Vorbereitung der Klausur.

49. Es seien K ein Körper, $\widetilde{A} \in \mathrm{Mat}_K(m \times n)$ und $A \in \mathrm{Mat}_K(m \times n)$. Wir sagen, daß $\widetilde{A}$ aus A durch elementare Spaltenoperationen gewonnen werden kann, falls es ein Produkt $Q \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ von Elementarmatrizen gibt, so daß $\widetilde{A} = AQ$. Zeigen Sie, daß es zu jeder Matrix A Produkte $P \in \mathrm{Mat}_K(m \times m)$ und $Q \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ von Elementarmatrizen gibt, so daß die Matrix PAQ in jeder Zeile und in jeder Spalte höchstens einen von 0 verschiedenen Eintrag hat.

50. Berechnen Sie die Inversen der folgenden invertierbaren reellen Matrizen A mittels des Gauß-Algorithmus:

    (a)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

    (b)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 11 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

51. Es seien $\mathcal{A} = (v_1, v_2)$ und $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ Basen von $\mathbb{R}^2$ mit
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
Es sei die lineare Abbildung $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ bezüglich der Basis $\mathcal{A}$ durch die Matrix
$$M(\mathcal{A}, F, \mathcal{A}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Prof. Dr. Katrin Wendland
PD Dr. Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Lineare Algebra I

WS 15/16

Übungsblatt 13

Dieses Übungsblatt wird nicht korrigiert und bewertet. Sie sollen jedoch die Möglichkeit haben, auch den Stoff des letzten Teils der Vorlesung zu üben. Es dient auch zur Vorbereitung der Klausur.

49. Es seien K ein Körper, $\widetilde{A} \in \mathrm{Mat}_K(m \times n)$ und $A \in \mathrm{Mat}_K(m \times n)$. Wir sagen, daß $\widetilde{A}$ aus A durch elementare Spaltenoperationen gewonnen werden kann, falls es ein Produkt $Q \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ von Elementarmatrizen gibt, so daß $\widetilde{A} = AQ$. Zeigen Sie, daß es zu jeder Matrix A Produkte $P \in \mathrm{Mat}_K(m \times m)$ und $Q \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ von Elementarmatrizen gibt, so daß die Matrix PAQ in jeder Zeile und in jeder Spalte höchstens einen von 0 verschiedenen Eintrag hat.

50. Berechnen Sie die Inversen der folgenden invertierbaren reellen Matrizen A mittels des Gauß-Algorithmus:

   (a)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

   (b)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 11 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

51. Es seien $\mathcal{A} = (v_1, v_2)$ und $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ Basen von $\mathbb{R}^2$ mit
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
   Es sei die lineare Abbildung $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ bezüglich der Basis $\mathcal{A}$ durch die Matrix
$$M(\mathcal{A}, F, \mathcal{A}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrizen $M(\mathcal{B}, F, \mathcal{B})$, $M(\mathcal{B}, F^2, \mathcal{B})$, und $M(\mathcal{B}, F^4, \mathcal{B})$.

52. Es seien $\mathcal{A} = (1, x, x^2, x^3)$ und $\mathcal{B} = (1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3)$ Basen von $\mathbb{R}[x]_3$ (vgl. Aufgabe 38(b)).

    (a) Bestimmen Sie die Transformationsmatrizen $M(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ und $M(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

    (b) Es sei $D : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_3, p \mapsto p'$ die Abbildung aus Aufgabe 38(b). Berechnen Sie die darstellende Matrix $M(\mathcal{A}, D, \mathcal{A})$ und das Matrixprodukt

    $$M(\mathcal{B}, \mathcal{A})M(\mathcal{A}, D, \mathcal{A})M(\mathcal{A}, \mathcal{B}).$$

    (c) Berechnen Sie nun die darstellende Matrix $M(\mathcal{B}, D, \mathcal{B})$ direkt ohne die Transformationsformel zu benutzen und verifizieren Sie, daß gilt:

    $$M(\mathcal{B}, D, \mathcal{B}) = M(\mathcal{B}, \mathcal{A})M(\mathcal{A}, D, \mathcal{A})M(\mathcal{A}, \mathcal{B}).$$

gegeben. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrizen $M(\mathcal{B}, F, \mathcal{B})$, $M(\mathcal{B}, F^2, \mathcal{B})$, und $M(\mathcal{B}, F^4, \mathcal{B})$.

52. Es seien $\mathcal{A} = (1, x, x^2, x^3)$ und $\mathcal{B} = (1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3)$ Basen von $\mathbb{R}[x]_3$ (vgl. Aufgabe 38(b)).

    (a) Bestimmen Sie die Transformationsmatrizen $M(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ und $M(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

    (b) Es sei $D : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_3, p \mapsto p'$ die Abbildung aus Aufgabe 38(b). Berechnen Sie die darstellende Matrix $M(\mathcal{A}, D, \mathcal{A})$ und das Matrixprodukt

    $$M(\mathcal{B}, \mathcal{A})M(\mathcal{A}, D, \mathcal{A})M(\mathcal{A}, \mathcal{B}).$$

    (c) Berechnen Sie nun die darstellende Matrix $M(\mathcal{B}, D, \mathcal{B})$ direkt ohne die Transformationsformel zu benutzen und verifizieren Sie, daß gilt:

    $$M(\mathcal{B}, D, \mathcal{B}) = M(\mathcal{B}, \mathcal{A})M(\mathcal{A}, D, \mathcal{A})M(\mathcal{A}, \mathcal{B}).$$