Prof. Dr. Katrin Wendland
PD Dr. Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Lineare Algebra I

WS 15/16

Übungsblatt 12

45. (4 Punkte) Es seien die reelle 5×6 Matrix A und ein reeller Spaltenvektor b der Länge 5 wie folgt gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -6 & 0 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 5 & 10 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems $Ax = b$, indem Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix mit Hilfe des Gauß-Algorithmus auf Zeilen-Stufen-Form bringen.

46. Es sei $I : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, $x = (x_1, x_2) \mapsto x_1 + ix_2$ der Standard-Vektorraum-Isomorphismus über $\mathbb{R}$. Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir die Abbildung $\phi_z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch $\forall\, x \in \mathbb{R}^2 : I(\phi_z(x)) = zI(x)$.

   (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß ϕ_z linear ist.

   (b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die reelle 2×2 Matrix A, für die gilt: $\phi_z(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$.

   (c) (1 Punkt) Bestimmen Sie die inverse Abbildung ϕ_z^{-1}, falls sie existiert, sowie die zugehörige Matrix B, für die gilt: $\phi_z^{-1}(y) = By$ für alle $y \in \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie AB und BA.

47. Es seien K ein Körper und $A \in \mathrm{Mat}_K(m \times n)$ mit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$. Wir definieren die Matrix $A^T = (a_{ji})_{\substack{1\leq j\leq n \\ 1\leq i\leq m}} \in \mathrm{Mat}_K(n \times m)$. Es sei $B \in \mathrm{Mat}_K(n \times p)$ eine weitere Matrix.

   (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß gilt: $(A^T)^T = A$ und $(AB)^T = B^T A^T$.

   (b) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß gilt: $\mathrm{rg} A = \mathrm{rg} A^T$.

   (c) (1 Punkt) Es seien $v \in \mathrm{Mat}_K(1 \times n)$ und $w \in \mathrm{Mat}_K(n \times 1)$, $v, w \neq 0$. Bestimmen Sie $\mathrm{rg}(vw)$ und $\mathrm{rg}(wv)$.

(d) (1 Punkt) Es sei $A = wv$ mit v und w wie in Aufgabe (c). Bestimmen Sie w, so daß gilt: $A = A^T$.

48. (4 Punkte) Bestimmen Sie eine reelle 4×4 Matrix A so, daß für

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

gilt: $Av_1 = 3v_1, Av_2 = 3v_2 + v_1, Av_3 = 3v_3 + v_2, Av_4 = 0$.

Abgabetermin: Donnerstag, 4. Februar 2016 um 08:00 Uhr