Prof. Dr. Katrin Wendland
PD Dr. Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Lineare Algebra I

WS 15/16

Übungsblatt 11

41. Es seien K ein Körper, $N \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, V ein K-Vektorraum, und $W_1, \dots, W_N \subset V$ Untervektorräume von V, so daß $W_k \cap \operatorname{span}\left(\bigcup_{j=1}^{k-1} W_j\right) = \{0\}$ für alle $2 \leq k \leq N$. Wir setzen $W_1' := W_1$, $W_k' := W_{k-1}' \oplus W_k$ für alle $2 \leq k \leq N$ und $W := W_N'$, d.h. $W = \Big(\big((W_1 \oplus W_2) \oplus W_3\big) \oplus \dots\Big) \oplus W_N$. Dafür schreiben wir abkürzend: $W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_N$. Zeigen Sie, daß gilt:

   (a) (1 Punkt) $(W_1 \oplus \cdots \oplus W_k) \oplus (W_{k+1} \oplus \cdots \oplus W_N) = W_1 \oplus \cdots \oplus W_N$ für alle $1 \leq k \leq N-1$.

   (b) (2 Punkte) Die Familie $(w_k)_{k \in \{1,\dots,N\}}$, $w_k \in W_k$, ist genau dann linear unabhängig, wenn $w_k \neq 0$ für alle $k \in \{1, \dots, N\}$.

   (c) (1 Punkt) Jedes $w \in W$ besitzt eine eindeutig bestimmte Darstellung $w = \sum_{k=1}^{N} w_k$ mit $w_k \in W_k$.

42. Berechnen Sie AB und BA für folgende Paare (A, B) von Matrizen mit Einträgen im Körper K:

   (a) (2 Punkte) $K = \mathbb{C}$:

$$A = \begin{pmatrix} -i & 1 & i & -i \\ 2i & -1 & -i & 0 \\ -1 & 0 & 1 & i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ -i & 0 & -i \\ 1 & -i & 1 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (b) (1 Punkt) $K = \mathbb{F}_7$:

$$A = \begin{pmatrix} [1] & [2] & [3] & [4] \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} [5] \\ [6] \\ [0] \\ [1] \end{pmatrix}$$

(c) (1 Punkt) $K = \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} & -3 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

43. Es seien K ein Körper, $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Für $\sigma \in S_m$ definieren wir die $m \times m$ Matrix $P_\sigma = (p_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le m}}$ durch $p_{ij} = 1$ falls $j = \sigma(i)$ und $p_{ij} = 0$ sonst.

(a) (2 Punkte) Es seien $m = 5$, $\sigma = (2, 4, 5, 1, 3) \in S_5$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_5 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_K(5 \times 1)$, und $w = (w_1 \dots w_5) \in \mathrm{Mat}_K(1 \times 5)$. Bestimmen Sie P_σ und berechnen Sie $P_\sigma v$ und wP_σ.

(b) (2 Punkte) Für eine $m \times m$-Matrix $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le m}}$, $a_{ij} \in K$, definieren wir

$$\det A := \sum_{\sigma \in S_m} \mathrm{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{m\sigma(m)}.$$

Zeigen Sie, daß für alle $\tau \in S_m$ gilt: $\det P_\tau = \mathrm{sign}(\tau)$.

44. Betrachten Sie die reelle Matrix

$$P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) (1 Punkt) Berechnen Sie P^2, $(1 - P)^2$.

(b) (1 Punkt) Bestimmen Sie je eine Basis von $\ker(P)$ und $\mathrm{im}(P)$.

(c) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß $\ker(P) = \mathrm{im}(1 - P)$ und $\mathrm{im}(P) = \ker(1 - P)$.

(d) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß $\mathbb{R}^4 = \ker(P) \oplus \mathrm{im}(P)$. Sind P, $1 - P$ injektiv, surjektiv (mit Beweis) ?

Abgabetermin: Donnerstag, 28. Januar 2016 um 08:00 Uhr