Prof. Dr. Katrin Wendland
PD Dr. Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Lineare Algebra I
WS 15/16

Übungsblatt 10

37. (4 Punkte) Es seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $V_1, V_2 \subset V$ endlich-dimensionale Unterräume von V. Zeigen Sie, daß gilt: $\dim(\operatorname{span}(V_1 \cup V_2)) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$.

    Hinweis: Beginnen Sie mit einer Basis von $V_1 \cap V_2$ und ergänzen Sie sie zu Basen von V_1 bzw. V_2. Bestimmen Sie daraus eine Basis von $V_1 + V_2$.

38. (a) (2 Punkte) Die lineare Abbildung $F_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto F_A(x) := Ax$ sei durch $(Ax)_i = \sum_{j=1}^4 A_{ij}x_j$, $i = 1, 2, 3$, und die reelle 3×4-Matrix $A = (A_{ij})_{1\le i\le 3, 1\le j\le 4}$ mit

    $$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & -3 & -7 \\ 3 & -6 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

    gegeben. Bestimmen Sie jeweils die Dimension und eine Basis für die Unterräume $\ker F_A$ und $\operatorname{im} F_A$.

    (b) (2 Punkte) Es seien K ein Körper der Charakteristik 0, $d \in \mathbb{N}$ und $K[x]_d = \{p \in K[x] \mid \deg p \le d\}$ die Polynome vom Grad kleiner gleich d (cf. Aufgabe 31(c)). Zeigen Sie, daß die Abbildung $' : K[x] \to K[x]$ aus Aufgabe 27(b) linear ist. Bestimmen Sie jeweils die Dimension und eine Basis für den Kern und das Bild der Einschränkung $' : K[x]_d \to K[x]_d$.

39. (a) (1 Punkt) Betrachten Sie die Abbildung $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 : \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z_2 \\ \overline{z}_1 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, daß f ein Gruppen-Homomorphismus $(\mathbb{C}^2, +) \to (\mathbb{C}^2, +)$ ist. Ist f auch ein $\mathbb{C}$-Vektorraum-Homomorphismus $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ (mit Beweis) ?

    (b) (1 Punkt) Betrachten Sie die Abbildung

    $$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} 3y \\ 2z \\ x \end{pmatrix}, & \text{falls } x, y, z \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

    Ist g ein $\mathbb{R}$-Vektorraum-Homomorphismus $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (mit Beweis) ?

(c) (2 Punkte) Es seien V, W $\mathbb{Q}$-Vektorräume. Zeigen Sie, daß jeder Gruppen-Homomorphismus $h : (V, +) \to (W, +)$ einen $\mathbb{Q}$-Vektorraum-Homomorphismus $V \to W$ definiert.

40. Es sei K ein Körper. Wir betrachten eine $m \times n$ Matrix $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$, $a_{ij} \in K$, für die es ganze Zahlen $0 \leq r \leq m$ und $1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_r \leq n$ gibt, so daß $a_{ij} = 0$, falls $i > r$, oder falls $i \leq r$ und $j < j_i$, und $a_{ij_i} \neq 0$ für alle $1 \leq i \leq r$. Die Matrix A hat dann folgende Gestalt:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1j_1} & * & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{2j_2} & * & \dots & \dots & \dots & \dots & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{3j_3} & * & \dots & \dots & \dots & * \\ \vdots & & & & & & & & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{rj_r} & * & \dots & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Die Einträge "$*$" sind beliebig. Zeigen Sie, daß gilt:

(a) (2 Punkte) Die ersten r Zeilenvektoren $w_k = (a_{k1}, \dots, a_{kn})$, $k = 1, \dots, r$, von A sind linear unabhängig.

(b) (2 Punkte) Die r Spaltenvektoren $v_{j_1}, \dots, v_{j_r}$ mit $v_{j_k} = \begin{pmatrix} a_{1j_k} \\ \vdots \\ a_{mj_k} \end{pmatrix}$, $k = 1, \dots r$, bilden eine Basis von $\mathrm{im}(A)$.

Abgabetermin: Donnerstag, 21. Januar 2016 um 08:00 Uhr