Prof. Dr. Katrin Wendland
PD Dr. Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Lineare Algebra I

WS 15/16

Probeklausur zur Vorlesung
Lineare Algebra I

Dezember 2015

Name: ____________________ Vorname: ____________________

Matrikelnr.: ________________ Studiengang: ________________

Klausurnr.: ________________ Unterschrift: ________________

Aufgabe 1	a	b	c	d	$\sum$
Punkte					
Aufgabe 2	a	b	c	d	$\sum$
Punkte					
Aufgabe 3	a	b	c	d	$\sum$
Punkte					
Aufgabe 4	a	b	c	d	$\sum$
Punkte					
				Total	

- Die Bearbeitungszeit ist maximal 180 Minuten.
- Jede Teilaufgabe ergibt maximal 4 Punkte. Insgesamt gibt es maximal 64 Punkte.
- Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus. Das Bereitlegen oder Verwenden von Smartphones wird mit Nichtbestehen der Klausur geahndet.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg !

1. (a) Es seien A und B Mengen. Geben Sie die Definitionen der folgenden mathematischen Begriffe:

   i. Äquivalenzrelation auf der Menge A

   ii. injektive Abbildung von A nach B

   iii. Abelsche Gruppe mit zugrundeliegender Menge B

   (b) Zeigen Sie, daß $R := \{((n,m),(n',m')) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \mid n + m' = n' + m\}$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiert. Die Äquivalenzklasse von (n,m) wird mit $n - m$ und die Menge der Äquivalenzklassen wird mit Z bezeichnet.

   (c) Zeigen Sie, daß die Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to Z$, $n \mapsto n - 0$ injektiv ist.

   (d) Zeigen Sie, daß es eine Verknüpfung $+ : Z \times Z \to Z$ gibt, welche von der Addition auf $\mathbb{N}$ vererbt ist. Zeigen Sie, daß $(Z, +)$ eine Abelsche Gruppe ist.

2. (a) Es seien X eine Menge und $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Geben Sie die Definitionen der folgenden mathematischen Begriffe:

   i. Automorphismus der Menge X

   ii. die symmetrische Gruppe S_m

   iii. ein p–Zykel $\sigma \in S_m$, $p \geq 1$.

   (b) Es sei σ in S_m. Zeigen Sie, daß es ein $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und disjunkte p_i–Zykel $\sigma_i \in S_m$ gibt, so daß $\sigma = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_r$ mit $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_r$. 1-Zykel seien dabei eingeschlossen, so daß $\sum_{i=1}^{r} p_i = m$. Wir nennen σ einen Zykel vom Typ $(p_1, \ldots, p_r)$.

   (c) Es sei $m = 4$. Bestimmen Sie alle möglichen Zykeltypen $(p_1, \ldots, p_r)$ in S_4, sowie für jedes $(p_1, \ldots, p_r)$ die Anzahl der Elemente in S_4 mit diesem Zykeltyp.

   (d) Es seien $\sigma, \tau \in S_m$. Zeigen Sie, daß es genau dann ein $\pi \in S_m$ mit $\tau = \pi \circ \sigma \circ \pi^{-1}$ gibt, wenn σ und τ denselben Zykeltyp haben.

   Hinweis: Gegeben $\pi \in S_m$ und $\tau = \pi \circ \sigma \circ \pi^{-1}$ sowie einen p–Zykel $(i_1, \ldots, i_p)$ von σ, bestimmen Sie zuerst die $\tau \circ \pi(i_k)$ für $k \in \{1, \ldots, p\}$.

3. (a) Es sei $(R, +)$ eine Abelsche Gruppe. Geben Sie die Definitionen der folgenden mathematischen Begriffe:

   i. Ordnung von $r \in R$ und von R.

   ii. kommutativer Ring mit zugrundeliegender Gruppe $(R, +)$.

   iii. Homomorphismus zwischen Ringen R_1 und R_2.

   (b) Es sei $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, daß $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ mit Verknüpfungen $+$, $\cdot$ versehen werden kann, die von $\mathbb{Z}$ ererbt sind, so daß $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring ist.

   (c) Es sei $d \in \mathbb{N}$, $d > 1$, ein Teiler von m. Zeigen Sie, daß es einen injektiven Gruppen–Homomorphismus $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$ gibt. Ist dies ein Ring–Homomorphismus (mit Beweis) ?

   (d) Es sei p eine Primzahl.

   Zeigen Sie, daß gilt: $\min\{m \in \mathbb{N} \mid a^m = 1 \, \forall a \in \mathbb{F}_p^*\} = p - 1$.

   Bemerkung: Es sei $(G, \cdot)$ eine endliche Gruppe. Der Gruppenexponent $\exp(G)$ ist definiert als $\exp(G) := \min\{m \in \mathbb{N} \mid a^m = 1 \, \forall a \in G\}$. Falls G Abelsch ist und $\exp(G) = |G|$ gilt, kann man zeigen, daß G zyklisch ist. Daraus folgt dann, daß $(\mathbb{F}_p^*, \cdot) \cong (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}, +)$, wenn p eine Primzahl ist.

4. Es sei K ein Körper.

(a) Es sei $(V, +)$ eine Abelsche Gruppe, $E \subset V$ eine Teilmenge. Geben Sie die Definitionen der folgenden mathematischen Begriffe:

i. Vektorraum über K auf der Gruppe V

ii. Linearkombination der $e \in E$

iii. Erzeugnis $\operatorname{span}(E)$

(b) Zeigen Sie, daß $K[x]$ mit der Addition von Polynomen und der Multiplikation eines Polynoms mit einem Element aus K ein Vektorraum über K ist. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, daß $(K[x], +)$ eine Abelsche Gruppe ist.

(c) Es sei $K = \mathbb{Q}$. Wir definieren $p_n \in \mathbb{Q}[x], n \in \mathbb{N}$ mit $p_0(x) := 1, p_1(x) := x$ und $p_{n+1}(x) := \frac{1}{n+1}\left((2n+1)xp_n(x) - p_{n-1}(x)\right)$ für alle $n \geq 2$. Zeigen Sie, daß $\deg p_n = n$.

(d) Bestimmen Sie $\operatorname{span}(\{p_n \mid n \in \mathbb{N}\})$ mit den p_n aus Aufgabe (c).