Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Anda Degeratu
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Differentialgeometrie I
WS 2013/2014
22. Januar, 2014

Übungsblatt 12

Abgabe: 28. Januar, 2014

Bewertung: Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Falls nichts anderes angegeben ist, werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Aufgabe 45:

(a) Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Es sei $\tilde{g} := r^2 g$ eine andere Riemannsche Metrik auf M mit $r > 0$. Zeigen Sie: Es gilt

$$\tilde{K} = \frac{1}{r^2} K, \quad \widetilde{\mathrm{Ric}} = \mathrm{Ric}, \quad \tilde{s} = \frac{1}{r^2} s.$$

(b) Es sei $S^n_r \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die Sphäre mit Radius r mit der von der Euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^{n+1}$ induzierten Metrik. Aus Aufgabe 43 (d) wissen Sie, dass die Schnittkrümmung der Einheitssphäre überall 1 ist. Benutzen Sie Teil (a), um die Schnittkrümmung, die Ricci-Krümmung und die Skalarkrümmung der Sphäre S^n_r zu bestimmen.

Aufgabe 46: Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.

(a) Zeigen Sie: In jeder Karte $(U, \xi = (x^1, \ldots, x^n))$ gilt $g_{ij;k} = 0$ für alle $1 \leq i, j, k \leq n$.

(b) Es seien $A \in \mathscr{T}_2^0(M)$ und $\alpha \in \mathscr{T}_1^1(M)$ das zugehörige Tensorfeld vom Typ $(1, 1)$ definiert durch

$$\langle \alpha(X), Y \rangle = A(X, Y) \quad \forall\, X, Y \in \mathscr{X}(M).$$

Es sei $a := \operatorname{tr} \alpha$. Zeigen Sie: Falls $A = \sum_{i,j} A_{ij} dx^i \otimes dx^j$ der lokale Koordinatenausdruck von A in der Karte $(U, \xi = (x^1, \ldots, x^n))$ ist, dann gelten

$$a = \sum_{i,j} g^{ij} A_{ij} \quad \text{und} \quad \frac{\partial a}{\partial x^l} = \sum_{i,j} g^{ij} A_{ij;l}$$

auf U.

Aufgabe 47: Es sei (M, g) eine n-dimensionale *Vakuum-Lösung* der Einsteingleichung mit kosmologischer Konstante Λ, d.h. es gilt

$$\mathrm{Ric} - \frac{s}{2} g + \Lambda g = 0.$$

Zeigen Sie:

(a) Falls $n \geq 3$, ist (M, g) eine Einstein-Mannigfaltigkeit, und zwar $\mathrm{Ric} = \frac{2\Lambda}{n-2} g$.

(b) Jede Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung ist Einstein.

Aufgabe 48: (Die Schwarzschild-Metrik) Es sei die Metrik

$$g := -(1 - \frac{2M}{r})dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2, \quad \text{wobei } dt^2 = dt \otimes dt \text{ etc.},$$

mit Koordinaten $t \geq 0$, $r > M$, $\theta \in [0, \pi)$, und $\varphi \in [0, 2\pi)$. Zeigen Sie, dass g eine Lösung der Einsteingleichung ohne kosmologische Konstante ist, d.h. zeigen Sie, dass $\mathrm{Ric}(g_M) \equiv 0$.

Hinweis:

(a) Es sei $f(r) := 1 - \frac{2M}{r}$. Die nicht-verschwindenden Koeffizienten der Metrik g sind dann

$$g_{tt} = -f(r), \quad g_{rr} = \frac{1}{f(r)}, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2\theta.$$

Finden Sie g^{tt}, g^{rr}, $g^{\theta\theta}$, $g^{\varphi\varphi}$, und dann benutzen Sie die Formel der Christoffel-Symbole in lokalen Koordinaten, um Γ^k_{ij} zu finden. Zeigen Sie:

$$\Gamma^t_{tr} = \Gamma^t_{rt} = \frac{1}{2}\frac{f'(r)}{f(r)}$$

$$\Gamma^r_{tt} = \frac{1}{2}f'(r)f(r), \quad \Gamma^r_{rr} = -\frac{1}{2}\frac{f'(r)}{f(r)}, \quad \Gamma^r_{\theta\theta} = -rf(r), \quad \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -rf(r)\sin^2\theta,$$

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta,$$

$$\Gamma^\varphi_{r\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi r} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \cot\theta,$$

und alle anderen Christoffel-Symbole verschwinden.

(b) Benutzen Sie $\mathrm{Ric}_{ij} = \sum_m R^m_{ijm}$ und die Formel aus Proposition 6.9 (i), um Ric_{ij} bezüglich der Funktion f zu finden. Die einzigen nicht-verschwindenden Komponenten sind Ric_{tt}, Ric_{rr}, $\mathrm{Ric}_{\theta\theta}$, und $\mathrm{Ric}_{\varphi\varphi}$.

(c) Zeigen Sie, dass für $f(r) = 1 - \frac{2M}{r}$ auch diese Koeffizienten verschwinden.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.