Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Anda Degeratu
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Differentialgeometrie I
WS 2013/2014
27. November, 2013

Übungsblatt 6

Abgabe: 3. Dezember, 2013

Bewertung: Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Falls nichts anderes angegeben ist, werden die Punkte gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt.

Aufgabe 21: Es seien V ein reeller Vektorraum mit $\dim V = n$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine nicht-degenerierte symmetrische Bilinearform vom Index ν auf V. Wir betrachten jetzt V als eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Mit der kanonischen Identifikation $T_pV \equiv V$ wird ein Vektorfeld X auf V eine glatte Abbildung $X : V \to V$. Es sei $g \in \mathscr{T}_0^2(V)$ definiert durch

$$g_p(X(p), Y(p)) := \langle X(p), Y(p) \rangle .$$

Zeigen Sie:

(a) g ist eine semi-Riemannsche Metrik auf V. (Man nennt sie die *konstante* Metrik.) Außerdem gibt es eine globale Karte $\xi = (x^1, \ldots, x^n)\colon V \to \mathbb{R}^n$, so dass

$$g = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i dx^i \otimes dx^i \qquad \text{wobei} \qquad \varepsilon_i = \begin{cases} -1 & \text{falls } 1 \leq i \leq \nu \\ 1 & \text{falls } \nu + 1 \leq i \leq n \end{cases} .$$

(b) Die Abbildung $\nabla^0 : \mathscr{X}(M) \times \mathscr{X}(M) \to \mathscr{X}(M)$, definiert durch

$$\nabla^0_X Y(p) := DY_p(X_p),$$

ist ein torsionsfreier Zusammenhang auf V. Man nennt ihn den *trivialen* Zusammenhang.

(c) Der Levi-Civita-Zusammenhang der Metrik g ist genau der obige triviale Zusammenhang.

(d) Die Christoffelsymbole der Metrik g bezüglich der obigen globalen Karte $(V, \xi = (x^1, \ldots, x^n))$ sind überall Null, d.h. $\Gamma^k_{ij} = 0$ für alle $1 \leq i, j, k \leq n$.

Aufgabe 22: Es seien (M, g) eine n-dimensionale semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und ∇ der entsprechende Levi-Civita-Zusammenhang.

(a) Es seien Γ^k_{ij} die Christoffelsymbole des Zusammenhanges ∇ bezüglich der Karte $(U, \xi = (x^1, \ldots, x^n))$. Zeigen Sie, dass die folgende Symmetrie gilt:

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji} \quad \text{für alle } 1 \leq i, j, k \leq n,$$

und dass diese äquivalent zur Torsionsfreiheit von ∇ ist.

(b) Es sei (P, j^*g) eine semi-Riemannsche Untermannigfaltigkeit von (M, g). Für jedes $p \in P$ und $X_p \in T_pM$ schreiben wir $X_p = X_p^T + X_p^\perp$ bezüglich der orthogonalen Zerlegung

$$T_pM = T_pP \oplus (T_pP)^\perp.$$

Es sei $\bar{\nabla}$ der Levi-Civita-Zusammenhang der Metrik j^*g. Zeigen Sie

$$\bar{\nabla}_X Y = \left(\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}|_P \right)^T$$

wobei $\tilde{X}$, $\tilde{Y} \in \mathscr{X}(M)$ Fortsetzungen von X bzw. Y sind.

Aufgabe 23: *(Die Euklidische Metrik in Polarkoordinaten)* Es sei $(\mathbb{R}^3, g_{\text{Eukl}})$ der 3-dimensionale Euklidische Raum, d.h. in Aufgabe 21 nehmen wir $V = \mathbb{R}^3$, $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^3 x^i y^i$ bezüglich der Standardbasis in $\mathbb{R}^3$, und $g_{\text{Eukl}} = \sum_{i=1}^3 dx^i \otimes dx^i$. Es sei (U, ψ) die Karte von $\mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\psi\colon U \to (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi) \quad \text{mit} \quad \psi^{-1}(r, \theta, \varphi) := (r \sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi).$$

(a) (1 Punkt) Berechnen Sie die Koeffizienten von g_{Eukl} in dieser Karte.

(b) (2 Punkte) Es sei ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang der Metrik g_{Eukl}. Berechnen Sie

$$\nabla_{\partial_r}\partial_r, \nabla_{\partial_r}\partial_\theta, \nabla_{\partial_r}\partial_\varphi, \nabla_{\partial_\theta}\partial_r, \nabla_{\partial_\theta}\partial_\theta, \nabla_{\partial_\theta}\partial_\varphi, \nabla_{\partial_\varphi}\partial_r, \nabla_{\partial_\varphi}\partial_\theta, \nabla_{\partial_\varphi}\partial_\varphi.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Eigenschaften des Levi-Civita-Zusammenhanges um die Berechnung einfacher zu machen.

(c) (1 Punkt) Es sei $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ die Einheitssphäre mit der Metrik $j^* g_{\text{Eukl}}$. (Mann nennt Sie die *runde* Metrik auf der Sphäre.) Die obige Karte (U, ψ) auf $\mathbb{R}^3$ induziert eine Karte $(U \cap S^2, \xi)$ auf S^2 (siehe Aufgabe 8). Berechnen Sie die Koeffizienten der Metrik $j^* g_{\text{Eukl}}$ in dieser Karte und dann $\bar\nabla_{\partial_\theta}\partial_\theta, \bar\nabla_{\partial_\theta}\partial_\varphi, \bar\nabla_{\partial_\varphi}\partial_\theta, \bar\nabla_{\partial_\varphi}\partial_\varphi$, wobei $\bar\nabla$ der Levi-Civita-Zusammenhang der Metrik $j^* g_{\text{Eukl}}$ ist.

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 22 (b). Aus Aufgabe 8 wissen wir, dass $(T_p S^2)^\perp = \mathit{span}\,\langle n_p\rangle$. Zeigen Sie, dass $n_p = \partial_r|_p$ für alle $p \in S^2$ gilt.

Aufgabe 24: Es sei $(\mathbb{R}^{n+1}, g_{\text{Mink}})$ der $(n+1)$-dimensionale Minkowski-Raum, d.h. in Aufgabe 21 nehmen wir $V = \mathbb{R}^{n+1}$, $\langle x, y\rangle = -x^0 y^0 + \sum_{i=1}^n x^i y^i$ bezüglich der Standardbasis $\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ in $\mathbb{R}^{n+1}$, und $g_{\text{Mink}} = -dx^0 \otimes dx^0 + \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i$. Für jedes $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sei

$$\mathscr{P}_a := \{p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle p, p\rangle = a\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass jedes $\mathscr{P}_a$ mit $a \neq 0$ eine glatte n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$ ist.

(b) Es seien $j_a : \mathscr{P}_a \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ die Inklusion und $g_a := j_a^* g_{\text{Mink}}$. Zeigen Sie, dass g_a eine semi-Riemannsche Metrik auf $\mathscr{P}_a$ ist. Berechnen Sie ihren Index.

Hinweis: Zeigen Sie erst: $T_p\mathscr{P}_a \cong \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle p, v\rangle = 0\}$ unter $(Dj_a)_p$.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.